Lineárna algebra – Domáca úloha č. 9

Cvičenia v týždni 19. novembra 2007

---

1. (3.6.6) Ak $V \cap W = \{0\}$, potom sa súčet $V + W$ nazýva *priamy súčet* priestorov V a W. Značíme $V \oplus W$. Ak je V generovaný vektormi $(1, 1, 1)$ a $(1, 0, 1)$, nájdite W aby $V \oplus W = \mathbb{R}^3$.

2. (3.6.7) Zdôvodnite, prečo sa každý vektor x v priamom súčte $V \oplus W$ dá *jednoznačne* vyjadriť ako $x = v + w$ pre $v \in V$ a $w \in W$.

3. (3.6.8) Priestor V je generovaný vektormi $v_1 = (1, 1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1, 0)$ a priestor W vektormi $w_1 = (0, 1, 0, 1)$ a $w_2 = (0, 0, 1, 1)$. Nájdite bázu súčtu $V + W$, ako aj bázu a dimenziu prieniku $V \cap W$.

4. (3.6.17) Nájdite faktorizáciu $A = LDL^T$ a potom tzv. *Choleského* faktory $(LD^{1/2})(LD^{1/2})^T$ pre maticu

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 45 \end{bmatrix}.$$

5. (3.R.31) Ukážte, že vzdialenosť nadroviny $a^T x - c = 0$ od počiatku v $\mathbb{R}^m$ je $|c|/\|a\|$. Ako ďaleko je nadrovina $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 8$ od počiatku a ktorý jej bod je k nemu najbližšie?

6. (3.R.24, 25) Tomograf sníma pacienta z rôznych smerov röntgenovými lúčmi a potom vyprodukuje maticu udávajúcu hustotu kostí a tkanív v každom bode. Z matematického hľadiska ide o zistenie zložiek matice z jej projekcií.

Vieme zrekonštruovať 2×2 maticu A, ak poznáme súčty zložiek v každom jej riadku a stĺpci?

Podobne, vieme v 3×3 prípade zrekonštruovať maticu A ak poznáme súčty zložiek v každom riadku, v každom stĺpci ako aj súčty pozdĺž hlavnej diagonály a ďalších štyroch diagonál s ňou rovnobežných?

7. Majme vektory $a_1 = (1, 1, 1)$ a $a_2 = (1, -1, 1)$. Maticu projekcie na vektor a_1 označme P_1 a maticu projekcie na vektor a_2 označme P_2. T.j. $P_i = \frac{a_i a_i^T}{a_i^T a_i}$. Nájdite maticu projekcie P na rovinu generovanú vektormi a_1, a_2 a presvedčte sa, že $P \neq P_1 + P_2$. Akú podmienku by museli spĺňať vektory a_1, a_2 aby takáto rovnosť platila?

8. (3.R.39) Ako vyzerá matica $A^T A$ ak sú stĺpce matice A ortogonálne? Ako keď sú ortonormálne?

9. (4.2.4) Ukážte prečo

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 \quad \text{a} \quad \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -1.$$

10. (4.2.11) a) Antisymetrická matica spĺňa $K^T = -K$, napríklad

$$K \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}.$$

Vysvetlite prečo v 3×3 prípade platí $\det(-K) = (-1)^3 \det K$. Zároveň $\det K^T = \det K$ (toto platí vždy). Z toho vyvoďte, že taká matica má nulový determinant.

b) Nájdite antisymetrickú 4×4 maticu s nenulovým determinantom.

11. (4.2.15) Nájdite determinanty pre nasledujúce matice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad A - \lambda I = \begin{bmatrix} 4 - \lambda & 2 \\ 1 & 3 - \lambda \end{bmatrix}.$$

Pre akú hodnotu parametra λ je $A - \lambda I$ singulárna?

12. (4.2.17) Predpokladajme, že $CD = -DC$. Nájdite chybu v nasledujúcom dôvodení: Zoberúc determinanty, dostávame $(\det C)(\det D) = -(\det D)(\det C)$, čiže aspoň jedna z matíc C alebo D musí mať nulový determinant. Preto rovnosť $CD = -DC$ môže nastať iba ak C alebo D je singulárna.