Lineárna algebra a geometria I. – Domáca úloha č. 12

Cvičenia v týždni 10. decembra 2007

---

1. (5.1.5) Nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory pre matice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{a} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Overte, že súčet $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ sa rovná stope matice a súčin $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ sa rovná determinantu.

2. (5.1.7) Predpokladajme, že λ je vlastná hodnota matice A a x je príslušný vlastný vektor, t.j. $Ax = \lambda x$.

(a) Ukážte, že x je tiež vlastným vektorom matice $B = A - cI$, kde $c \in \mathbb{R}$. Nájdite vlastnú hodnotu prislúchajúcu vektoru x.

(b) Predpokladajme, že $\lambda \neq 0$. Ukážte, že potom je x vlastným vektorom matice A^{-1} a nájdite vlastnú hodnotu.

3. (5.1.10) (a) Skonštruujte 2×2 matice A a B také, že vlastné hodnoty súčinu AB nebudú súčinom vlastných hodnôt matíc A a B, podobne vlastné hodonoty $A + B$ nebudú súčtom jednotlivých vlastných hodnôt.

(b) Overte, že napriek tomu sa súčet vlastných hodnôt matice $A + B$ rovná súčtu všetkých vlastných hodnôt matíc A a B, podobne pre súčiny. Prečo je to tak?

4. (5.1.11) Ukážte, že A a A^T majú rovnaké vlastné hodnoty porovnaním ich charakteristických polynómov.

5. (5.1.12) Nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory pre maticu $A = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ b & a \end{smallmatrix}\right]$.

6. (5.1.13) Ak matica B má vlastné hodnoty 1, 2, 3, matica C má vlastné hodnoty 4, 5, 6 a matica D má vlastné hodnoty 7, 8, 9, čo budú vlastné hodnoty 6×6 matice $A = \left[\begin{smallmatrix} B & C \\ 0 & D \end{smallmatrix}\right]$?

7. (5.1.14) Nájdite hodnosť a všetky štyri vlastné hodnoty pre matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{a} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Aké vlastné vektory zodpovedajú nenulovým vlastným vektorom?

8. (5.1.16) Nech A je 4×4 matica, ktorej zložky sú samé jednotky (ako v predošlom príklade). Nájdite potom vlastné hodnoty a determinant matice $A - I$. Porovnajte tiež s príkladom 4.3.10 - dú. č. 10, príklad 10.

9. (5.1.18) Predpokladajme, že matica A má vlastné hodnoty 0, 1, 2 a k nim vlastné vektory v_0, v_1, v_2. Opíšte nulový priestor a stĺpcový priestor matice A. Riešte rovnicu $Ax = av_1 + bv_2$. Ukážte, že rovnica $Ax = v_0$ nemá riešenie.

10. (5.2.2) Nájdite maticu A, ktorej vlastné hodnoty sú 1 a 4 a vlastné vektory k nim sú $\left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ a $\left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$.

11. (5.2.4) Ukážte, že ak má horná trojuholníková 3×3 matica na diagolále zložky 1, 2 a 7, potom je diagonalizovateľná. Ako bude vyzerať matica Λ?

12. (5.2.6) (a) Ak $A^2 = I$, aké môže mať matica A vlastné hodnoty?

(b) Ak je takáto matica typu 2×2 a nerovná sa I alebo $-I$, nájdite jej stopu a determinant.

(c) Dopočítajte druhý riadok matice, ak je jej prvý riadok $(3, -1)$.

13. (5.2.8) Predpokladajme, že $A = uv^T$, teda matica A vznikne vynásobením stĺpca riadkom (a má preto hodnosť 1).

(a) Ukážte, prenásobením matice A vektorom u, že u je jej vlastný vektor. Čo bude λ?

(b) Aké sú ostatné vlastné hodnoty (a prečo)?

(c) Vypočítajte stopa$(A) = v^T u$ dvoma rôznymi spôsobmi – ako súčet prvkov na diagonále a ako súčet vlastných hodnôt.

14. (5.2.9) Priamym výpočtom ukážte, že AB a BA majú rovnakú stopu, keď

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{bmatrix} q & r \\ s & t \end{bmatrix}.$$

Odvoďte z toho, že $AB - BA = I$ nemôže nastať. (Je to možné iba pre zobrazenia na nekonečne rozmerných priestoroch)