Lineárna algebra – Domáca úloha č. 2

Cvičenia v týždni 6. októbra 2008

---

1. (1.5.5) Nájdite LU rozklad pre maticu A, ako aj lineárny systém $Ux = c$ v hornom trojuholníkovom tvare, ktorý vznikne elimináciou pre

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

2. (1.5.15 + rozšírenie) Nájdite rozklady $PA = LDU$ (a skontrolujte ich) pre

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

V oboch prípadoch robte elimináciu tak, ako ste zvyknutí, ale navyše si zapíšte každú elementárnu maticu. V prvom prípade by Vám malo výjsť poradie P, $E_{3,1}$, $E_{3,2}$, teda rovnosť $E_{3,2}E_{3,1}PA = U$, z čoho sa už ľahko dá nájsť rozklad.

V druhom prípade by poradie malo výjsť $E'_{2,1}$, $E'_{3,1}$, P', teda rovnosť $P'E'_{3,1}E'_{2,1}A' = U'$. Matice P' a $E'_{3,1}$, resp. $E'_{2,1}$, nekomutujú, ale platí $P'E_{3,1} = F_{2,1}P'$ pre nejakú inú elementárnu maticu $F_{2,1}$, a tiež $P'E_{2,1} = F_{3,1}P'$ pre nejakú $F_{3,1}$. Ukážte, že matice $F_{2,1}$ a $F_{3,1}$ navzájom komutujú, čiže môžeme prejsť k rovnosti $P'E'_{3,1}E'_{2,1}A' = F_{3,1}F_{2,1}P'A' = U'$. Vysvetlite čo postupnosť operácií daných maticami P', $F_{2,1}$ a $F_{3,1}$ robí so systémom, a aký je význam danej maticovej rovnosti $P'E'_{3,1}E'_{2,1} = F_{3,1}F_{2,1}P'$.

3. (1.5.18) Rozhodnite či sú nasledujúce systémy singulárne alebo regulárne, či nemajú ani jedno, práve jedno alebo nekonečne veľa riešení:

$$\begin{aligned} v-w &= 2 \\ u-v &= 2, \\ u -w &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} v-w &= 0 \\ u-v &= 0 \\ u -w &= 0 \end{aligned} \qquad \text{a} \qquad \begin{aligned} v+w &= 1 \\ u+v &= 1. \\ u +w &= 1 \end{aligned}$$

4. (1.6.2) a) Nájdite inverzné matice k permutačným maticiam

$$P_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad P_{132} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Vysvetlite prečo je pre permutačné matice P^{-1} *vždy rovnaká* ako P^T. Ukážte, že jednotky v súčine PP^T budú na správnom mieste a naozaj dostaneme $PP^T = I$.

5. (1.6.4) (a) Ak je A invertibilná matica a $AB = AC$, dôkážte, že $B = C$.
(b) Pre $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ nájdite matice B a C, pre ktoré $AB = AC$ ale $B \neq C$.

6. (1.6.6) Nájdite inverzné matice k maticiam

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. (1.6.9) Pre maticu

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

eliminácia zlyhá. Ukážte, že k takejto matici neexistuje inverzná. Tretí riadok inverznej matice A^{-1} násobený maticou A by mal dať tretí riadok súčinu $A^{-1}A = I$. Prečo je to nemožné?

8. (1.6.12) Ktoré z vlastností matice sa zachovávajú aj pre maticu k nej inverznú?
a) A je trojuholníková,
b) A je symetrická,
c) A je tridiagonálna (t.j. nenulové prvky môžu byť iba na hlavnej diagonále a na dvoch diagonálach s ňou susediacich),
d) všetky zložky A sú celé čísla,
e) všetky zložky A sú racionálne čísla.

9. (1.6.14) Ukážte, že (aj) pre obdĺžnikové matice sú matice AA^T a A^TA vždy symetrické. Ukážte na príklade, že sa tieto matice nemusia rovnať, a to ani pre štvorcové matice.

10. (1.6.16) (a) Koľko je navzájom nezávislých zložiek v symetrickej matici typu $n \times n$?
(b) Koľko je navzájom nezávislých zložiek v antisymetrickej matici typu $n \times n$?

11. (1.6.17) (a) Ak v rozklade $A = LDU$ máme na diagonálach trojuholníkových matíc L a U jednotky, ako bude vyzerať rozklad matice A^T? Všimnite si, že matice A a A^T (v prípade, že počas eliminácie nedochádza k výmene riadkov) majú rovnaké vedúce prvky.
(b) Ako vyzerá vyzerá systém v hornom trojuholníkovom tvare pre $A^Ty = b$?

12.* (1.6.23) Nech A a B sú štvorcové matice. Ukážte, že $I - AB$ je invertibilná práve vtedy, keď $I - BA$ je invertibilná. Výjdite z rovnosti $B(I - AB) = (I - BA)B$. Venujte špeciálnu pozornosť prípadu, keď je matica B singulárna.