Lineárna algebra – Domáca úloha č. 3

Cvičenia v týždni 13. októbra 2008

---

1. Použitím definičných vlastností vektorového priestoru ukážte:
a) Ak pre vektory v a n platí $v + n = v$, potom $n = 0$.
b) Ak v je nenulový vektor a c nenulový skalár, potom je vektor cv nenulový.

2. Ak by sme zobrali n-tice čísel zo $\mathbb{Z}_5$, t.j. zvyškov po delení piatimi, dostali by sme množinu $\mathbb{Z}_5^n$. Ukážte, že takáto množina spolu so sčítaním po zložkách (sčítavame zvyškové triedy) a násobením skalárom zo $\mathbb{Z}_5$ bude spĺňať vlastnosti, ktoré požadujeme od vektorového priestoru.
Čo zlyhá, ak by sme niečo podobné skúsili spraviť na množine $\mathbb{Z}_6^n$?

3. (2.1.2) Ktoré z nasledujúcich podmnožín $\mathbb{R}^3$ sú podpriestory?
a) Rovina zložená z vektorov s prvou zložkou $b_1 = 0$.
b) Rovina zložená z vektorov s $b_1 = 1$.
c) Množina vektorov b spĺňajúcich $b_1 b_2 = 0$ (táto množina bude zjednotením roviny $b_1 = 0$ a roviny $b_2 = 0$).
d) Všetky kombinácie vektorov $x = (1, 1, 0)$ a $y = (2, 0, 1)$.
e) Vektory (b_1, b_2, b_3) spĺňajúce $b_3 - b_2 + 3b_1 = 0$.

4. (2.1.4) Aký je najmenší podpriestor matíc typu 3×3, ktorý obsahuje všetky symetrické aj dolné trojuholníkové matice? (Pozn. symetrické matice aj dolné torjuholníkové matice tvoria podpriestory priestoru matíc) Aký je najväčší podpriestor, ktorý je obsiahnutý v oboch týchto podpriestoroch?

5. (2.1.7) Ktoré z nasledujúcich podmnožín $\mathbb{R}^\infty$ sú podpriestormi?
a) Všetky postupnosti, ktoré obsahujú nekonečne veľa núl (napr. $(1, 0, 1, 0, \dots)$).
b) Všetky postupnosti $(x_1, x_2, \dots)$, ktoré sú od isteho členu nulové (t.j. $x_j \neq 0$ iba pre konečne veľa členov).
c) Všetky klesajúce postupnosti: $x_{j+1} \leq x_j$ pre každé j.
d) Všetky konvergentné postupnosti: x_j majú limitu pre $j \to \infty$.
e) Všetky aritmetické postupnosti: $x_{j+1} - x_j$ je rovnaké pre všetky j.
f) Všetky geometrické postupnosti $(x_1, kx_1, k^2x_1, \dots)$, kde k a x_1 sú ľubovoľné.

6. (2.2.3) Nájdite LU rozklad pre maticu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rozhodnite, ktoré premenné sú voľné a ktoré viazané, nájdite všeobecné riešenie systému $Ax = 0$. Aká je hodnosť matice A?

7. (2.2.6) Vyjadrite všeobecné riešenie systému

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

ako súčet čiastkového riešenia systému $Ax = b$ a všeobecného riešenia homogénneho systému $Ax = 0$.

8. (2.2.10) a) Nájdite všetky riešenia systému

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

b) Ako budú vyzerať riešenia ak zmeníme pravú stranu z $(0, 0, 0)$ na $(a, b, 0)$?

9. (2.2.12) Nájdite systém dvoch rovníc o troch neznámych $Ax = b$, ktorého všeobecné riešenie má tvar

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

10. Každý stĺpec matice AB je kombináciou stĺpcov matice A. To znamená, že *stĺpcový priestor matice AB je podmnožinou stĺpcového priestoru matice A (alebo sa mu rovná).* Uveďte príklad, kde sa stĺpcové priestory matíc A a AB nerovnajú.

11. Pravda/nepravda. Zdôvodnite.
a) Vektory b, ktoré nepatria do stĺpcového priestoru $\mathcal{S}(A)$ tvoria podpriestor.
b) Ak $\mathcal{S}(A)$ obsahuje iba nulový vektor, potom je A nulová matica.
c) Stĺpcový priestor matice $2A$ je rovnaký ako stĺpcový priestor matice A.
d) Stĺpcový priestor matice $A - I$ je rovnaký ako stĺpcový priestor matice A.