Lineárna algebra – Domáca úloha č. 4

Cvičenia v týždni 20. októbra 2008

---

1. (2.3.2 b,c) Rozhodnite či sú nasledujúce vektory lineárne závislé alebo nezávislé:
b) $v_1 - v_2$, $v_2 - v_3$, $v_3 - v_4$, $v_4 - v_1$ pre ľubovoľné vektory v_1, v_2, v_3 a v_4,
c) $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$ a (x, y, z), kde x, y a z sú ľubovoľné reálne čísla.

2. (2.3.4) Je pravda, že ak sú vektory v_1, v_2 a v_3 lineárne nezávislé, potom sú aj vektory $w_1 = v_1 + v_2$, $w_2 = v_1 + v_3$ a $w_3 = v_2 + v_3$ lineárne nezávislé? *Pomôcka:* Predpokladajte $c_1w_1 + c_2w_2 + c_3w_3 = 0$ a nájdite vhodné c_i.

3. (2.3.13) Nájdite dimenzie priestorov:
a) priestor vektorov v $\mathbb{R}^4$, ktorých zložky v súčte dávajú nulu,
b) nulový priestor (jadro) identickej matice typu 4×4,
c) priestor všetkých matíc typu 4×4,
d) priestor všetkých antisymetrických matíc typu 4×4.

4. (2.3.15) Predpokladajme, že priestor V má dimenziu k. Ukážte, že
a) ľubovoľných k lineárne nezávislých vektorov vo V tvorí jeho bázu,
b) ľubovoľných k vektorov, ktoré generujú celé V tvorí jeho bázu.

5. (2.3.17) Ukážte, že ak V a W sú trojrozmerné podpriestory priestoru $\mathbb{R}^5$, potom existuje nenulový vektor patriaci do V aj W, teda $V \cap W \neq \{0\}$.

6. (2.3.20) a) V priestore matíc typu 2×2 nájdite bázu podpriestoru P – matíc, pre ktoré sa súčty zložiek v riadkoch aj stĺpcoch rovnajú. Teda

$$P = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \, a + b = c + d = a + c = b + d \right\}.$$

b) Nájdite päť lineárne nezávislých matíc typu 3×3 s touto vlastnosťou.

7. (2.3.18, 2.3.22, 2.4.21) Pravda/nepravda. Zdôvodnite.
a) Ak sú stĺpce matice A lineárne nezávislé, potom má systém $Ax = b$ práve jedno riešenie pre každé b.
b) Matica typu 5×7 nikdy nemôže mať lineárne nezávislé stĺpce.
c) Každá báza podpriestoru W sa dá rozšíriť na bázu priestoru V. (predpokladajme $\dim W \neq \dim V$)
d) Každá báza priestoru V sa dá zredukovať na bázu podpriestoru W. (opäť $\dim W \neq \dim V$)
e) Ak sú štyri základné podpriestory matice A rovnaké ako tie pre maticu B, potom $A = B$.

8. (2.4.3) a) Nájdite dimenzie a bázy pre všetky štyri základné podpriestory pre matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

9. (2.4.6) Ukážte, že systém $Ax = b$ má riešenie práve vtedy, ak hodnosť(A) = hodnosť(A'), kde matica A' je matica, ktorú získame z A pridaním b ako stĺpca navyše.

10. (2.4.12) Nech $Ax = 0$ má netriviálne riešenie. Ukážte, že $A^T y = f$ nebude mať riešenie pre nejaké f. Nájdite príklad takého A a f.

11. (2.4.17) (*Paradox*) Majme pravú inverznú maticu k A, teda $AB = I$. Po prenásobení maticou A^T dostaneme $A^TAB = A^T$, z čoho $B = (A^TA)^{-1}A^T$. Ale potom $BA = I$, t.j. B by mala byť aj *ľavá* inverzná matica k A. Ktorý krok v tomto "dôkaze" je nekorektný?

12. (2.4.20) Nájdite maticu s požadovanými vlastnosťami, alebo dokážte, že taká nemôže existovať.

a) Stĺpcový priestor obsahuje $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, riadkový priestor obsahuje $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

b) Stĺpcový priestor má bázu $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, nulový priestor má bázu $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

c) Stĺpcový priestor $= \mathbb{R}^4$, riadkový priestor $= \mathbb{R}^3$.

13. Riešte systém lineárnych rovníc $Ax = b$, kde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{a} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) v obore $\mathbb{Q}$, b) v $\mathbb{Z}_2$, c) v $\mathbb{Z}_3$, d) v $\mathbb{Z}_7$.

Aké sú dimenzie stĺpcového (resp. riadkového) priestoru matice A, keď sa na stĺpce (resp. riadky) pozeráme ako na vektory v $\mathbb{Q}^3$, $\mathbb{Z}_2^3$, $\mathbb{Z}_3^3$ a v $\mathbb{Z}_7^3$?