Lineárna algebra – Domáca úloha č. 5

Pre týždeň 27. októbra 2008. V piatok 31.10.2008 je rektorské voľno, takže toto je naozaj *domáca* úloha.

---

1. (2.6.3) Rozhodnite, či zloženie piatich osových symetrií a ôsmimich rotácí roviny dá rotáciu alebo osovú symetriu. Záleží na poradí v ktorom tieto transforácie robíme?

2. (2.6.5) Priamku prechádzajúcu cez koncové body vektorov u a v môžeme reprezentovať ako koncové body množiny vektorov $P = \{tu + (1-t)v \,|\, t \in \mathbb{R}\}$. Ukážte, že každá lineárna tansformácia zobrazuje priamku na priamku. Tiež ukážte, že stred úsečky tvorenej koncovými bodmi vektorov x a y sa zobrazí na stred úsečky z Ax do Ay.

3. (2.6.7) Nájdite matice typu 3×3 reprezentujúce transformácie v $\mathbb{R}^3$, ktoré
i) sprojektujú každý vektor do roviny xy,
ii) zobrazia každy vektor symetricky podľa roviny xy,
iii) otočia rovinu xy o uhol γ, nechajúc os z namieste,
iv) otočia rovinu xy, potom rovinu xz a nakoniec rovinu yz, vždy o $90°$,
v) spravia tie isté rotácie ako v iv) len vždy o $180°$.

4. (2.6.9) Nájdite maticu lineárnej transformácie (je to naozaj lineárna transformácia?) z priestoru polynómov $P_3(t)$ do priestoru $P_4(t)$, ktorá každému polynómu priradí jeho $(2+3t)$-násobok.

5. (2.6.13) Predpokladajme, že A je lineárna transformácia roviny xy reprezentovaná maticou M. Ukážte, že ak existuje zobrazenie A^{-1}, potom je aj ono lineárnou transformáciou. Vysvetlite prečo matica M^{-1} reprezentuje A^{-1}.

6. (2.6.16) Priestor všetkých matíc typu 2×2 má štyri bázové "vektory"

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ukážte, že operácia *transpozície* je lineárnou transformáciou na tomto priestore a nájdite príslušnú maticu A v tejto báze. Prečo platí $A^2 = I$?

7. (2.6.21) Lineárna transformácia posielajúca vektor tvaru (x_1, x_2, x_3) do (x_2, x_3, x_1) je rotácia. Nájdite jej os a uhol.