

1. (3.1.6) V \mathbb{R}^3 nájdite všetky vektory, ktoré sú kolmé na vektory $(1, 1, 1)$ a $(1, -1, 0)$. Vytvorte z týchto vektorov bázu \mathbb{R}^3 , v ktorej budú všetky vektory navzájom ortogonálne a budú mať jednotkovú dĺžku (tvoria tzv. *ortonormálnu* bázu).

2. (3.1.8) Nech V a W sú ortogonálne podpriestory. Ukážte, že iba nulový vektor patrí do oboch z nich, t.j. $V \cap W = \{0\}$.

3. (3.1.11) Tvrdenie o riešiteľnosti systémov lineárnych rovníc sa dá formulovať pomocou tzv. *Fredholmovej alternatívy*: pre každé A a b má práve jeden zo systémov riešenie

$$(i) \quad Ax = b \qquad (ii) \quad A^T y = 0, \quad y^T b \neq 0.$$

Inými slovami, buď b patrí do stĺpcového priestoru $\mathcal{S}(A)$ alebo existuje y v $\mathcal{N}(A^T)$ také, že $y^T b \neq 0$. Ukážte, že rovnice (i) a (ii) nemôžu mať riešenie zároveň.

4. (3.1.14) Ukážte, že $x - y$ je kolmé na $x + y$ práve vtedy, keď $\|x\| = \|y\|$.

5. (3.1.17) Nech V je ortogonálny doplnok podpriestoru W v \mathbb{R}^n . Existuje matica, ktorej riadkový priestor je V a nulový priestor je W ? Vychádzajúc z bázy priestoru V , ukážte ako by sa skonštruovala taká matica.

6. (3.1.19) Pravda/Npravda. Zdôvodnite.

a) ak V je ortogonálne k W , potom aj V^\perp je ortogonálne k W^\perp ,

b) Ak V je ortogonálne k W a W je ortogonálne k Z , potom aj V je ortogonálne k Z .

7. (3.1.20) Nech S je podpriestor \mathbb{R}^n . Vysvetlite, čo znamená rovnosť $(S^\perp)^\perp = S$ a prečo platí.

8. (3.1.22) Nech S je podpriestor \mathbb{R}^4 tvorený vektormi spĺňajúcimi $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Nájdite bázu priestoru S^\perp , t.j. priestoru vektorov kolmých na S .

9. (3.2.3) Aký násobok vektora $a = (1, 1, 1)$ je najbližšie k bodu $b = (2, 4, 4)$? Nájdite tiež najbližší bod k bodu a na priamke prechádzajúcej cez b .

10. (3.2.5) Aký uhol zvierajú vektor $(1, 1, \dots, 1)$ v \mathbb{R}^n so súradnicovými osami? Ako vyzerá projekcia na priamku danú týmto vektorom?

11. (3.2.8) Molekula metánu CH_4 vyzerá tak, že atóm uhlíka je v strede pravidelného štvorstena a štyri atómy vodíka sú v jeho vrcholoch. Ak si za vrcholy vyberieme body $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ a $(0, 1, 1)$, potom dĺžky všetkých hrán medzi nimi budú $\sqrt{2}$, teda naozaj ide o pravidelný štvorsten. Aký je kosínus uhla medzi úsečkami spájajúcimi stred $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ s vrcholmi? Aká je veľkosť tohto uhla?

12. (2.6.19) Vo vektorovom priestore $P_3(t)$ polynómov stupňa 3, t.j. $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$, majme podmnožinu S polynómov spĺňajúcich $\int_0^1 p(t) dt = 0$. Overte, že S je podpriestor a nájdite jeho bázu.

Pozn. Použite vzorec $\int_0^1 t^k dt = \frac{1}{k+1}$.