

1. (1.6.6) Nájdite inverzné matice k maticiam

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. (1.6.9) Pre maticu

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

eliminácia zlyhá. Ukážte, že k takejto matici neexistuje inverzná. Tretí riadok inverznej matice A^{-1} násobený maticou A by mal dať tretí riadok súčinu $A^{-1}A = I$. Prečo je to nemožné?

3. (1.6.12) Ktoré z vlastností matice sa zachovávajú aj pre maticu k nej inverznú?
- A je trojuholníková,
 - A je symetrická,
 - A je tridiagonálna (t.j. nenulové prvky môžu byť iba na hlavnej diagonále a na dvoch diagonálach s ňou susediacich),
 - všetky zložky A sú celé čísla,
 - všetky zložky A sú racionálne čísla.

4. (1.6.14) Ukážte, že (aj) pre obdĺžnikové matice sú matice AA^T a $A^T A$ vždy symetrické. Ukážte na príklade, že sa tieto matice nemusia rovnať, a to ani pre štvorcové matice.

5. (1.6.16) (a) Koľko je navzájom nezávislých zložiek v symetrickej matici typu $n \times n$?
 (b) Koľko je navzájom nezávislých zložiek v antisymetrickej matici typu $n \times n$?

6. (1.6.17) (a) Ak v rozklade $A = LDU$ máme na diagonálach trojuholníkových matíc L a U jednotky, ako bude vyzeráť rozklad matice A^T ? Všimnite si, že matice A a A^T (v prípade, že počas eliminácie nedochádza k výmene riadkov) majú rovnaké vedúce prvky.

- (b) Ako vyzerá vyzerá systém v hornom trojuholníkovom tvare pre $A^T y = b$?

7. Použitím definičných vlastností vektorového priestoru ukážte:

- Ak pre vektory v a n platí $v + n = v$, potom $n = 0$.
- Ak v je nenulový vektor a c nenulový skalár, potom je vektor cv nenulový.

8. Ak by sme zobrali n -tice čísel zo $\mathbb{Z}_5$, t.j. zvyškov po delení piatimi, dostali by sme množinu $\mathbb{Z}_5^n$. Ukážte, že takáto množina spolu so sčítaním po zložkách (sčítavame zvyškové triedy) a násobením skalárom zo $\mathbb{Z}_5$ bude spĺňať vlastnosti, ktoré požadujeme od vektorového priestoru.

Čo zlyhá, ak by sme niečo podobné skúsili spraviť na množine $\mathbb{Z}_6^n$?

9. (2.1.2) Ktoré z nasledujúcich podmnožín $\mathbb{R}^3$ sú podpriestory?

- Rovina zložená z vektorov s prvou zložkou $b_1 = 0$.
- Rovina zložená z vektorov s $b_1 = 1$.
- Množina vektorov b spĺňajúcich $b_1 b_2 = 0$ (táto množina bude zjednotením roviny $b_1 = 0$ a roviny $b_2 = 0$).
- Všetky kombinácie vektorov $x = (1, 1, 0)$ a $y = (2, 0, 1)$.
- Vektory (b_1, b_2, b_3) spĺňajúce $b_3 - b_2 + 3b_1 = 0$.

10. (2.1.4) Aký je najmenší podpriestor matíc typu 3×3 , ktorý obsahuje všetky symetrické aj dolné trojuholníkové matice? (Pozn. symetrické matice aj dolné trojuholníkové matice tvoria podpriestory priestoru matíc) Aký je najväčší podpriestor, ktorý je obsiahnutý v oboch týchto podpriestoroch?

11. (2.1.7) Ktoré z nasledujúcich podmnožín $\mathbb{R}^\infty$ sú podpriestormi?

- a) Všetky postupnosti, ktoré obsahujú nekonečne veľa núl (napr. $(1, 0, 1, 0, \dots)$).
- b) Všetky postupnosti $(x_1, x_2, \dots)$, ktoré sú od istého člena nulové (t.j. $x_j \neq 0$ iba pre konečne veľa členov).
- c) Všetky klesajúce postupnosti: $x_{j+1} \leq x_j$ pre každé j .
- d) Všetky konvergentné postupnosti: x_j majú limitu pre $j \rightarrow \infty$.
- e) Všetky aritmetické postupnosti: $x_{j+1} - x_j$ je rovnaké pre všetky j .
- f) Všetky geometrické postupnosti $(x_1, kx_1, k^2x_1, \dots)$, kde k a x_1 sú ľubovoľné.

12.* (1.6.23) Nech A a B sú štvorcové matice. Ukážte, že $I - AB$ je invertibilná práve vtedy, keď $I - BA$ je invertibilná. Výjdite z rovnosti $B(I - AB) = (I - BA)B$. Venujte špeciálnu pozornosť prípadu, keď je matica B singulárna.