Lineárna algebra – Domáca úloha č. 4

Cvičenia v týždni 19. októbra 2009

---

1. (2.2.3) Nájdite LU rozklad pre maticu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rozhodnite, ktoré premenné sú voľné a ktoré viazané, nájdite všeobecné riešenie systému $Ax = 0$. Aká je hodnosť matice A?

2. (2.2.6) Vyjadrite všeobecné riešenie systému

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

ako súčet čiastkového riešenia systému $Ax = b$ a všeobecného riešenia homogénneho systému $Ax = 0$.

3. (2.2.10) a) Nájdite všetky riešenia systému

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

b) Ako budú vyzerať riešenia ak zmeníme pravú stranu z $(0, 0, 0)$ na $(a, b, 0)$?

4. (2.2.12) Nájdite systém dvoch rovníc o troch neznámych $Ax = b$, ktorého všeobecné riešenie má tvar

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

5. Každý stĺpec matice AB je kombináciou stĺpcov matice A. To znamená, že *stĺpcový priestor matice AB je podmnožinou stĺpcového priestoru matice A (alebo sa mu rovná).* Uveďte príklad, kde sa stĺpcové priestory matíc A a AB nerovnajú.

6. Pravda/nepravda. Zdôvodnite.
a) Vektory b, ktoré nepatria do stĺpcového priestoru $\mathcal{S}(A)$ tvoria podpriestor.
b) Ak $\mathcal{S}(A)$ obsahuje iba nulový vektor, potom je A nulová matica.
c) Stĺpcový priestor matice $2A$ je rovnaký ako stĺpcový priestor matice A.
d) Stĺpcový priestor matice $A - I$ je rovnaký ako stĺpcový priestor matice A.

7. (2.3.2 b,c) Rozhodnite či sú nasledujúce vektory lineárne závislé alebo nezávislé:
b) $v_1 - v_2$, $v_2 - v_3$, $v_3 - v_4$, $v_4 - v_1$ pre ľubovoľné vektory v_1, v_2, v_3 a v_4,
c) $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$ a (x, y, z), kde x, y a z sú ľubovoľné reálne čísla.

8. (2.3.4) Je pravda, že ak sú vektory v_1, v_2 a v_3 lineárne nezávislé, potom sú aj vektory $w_1 = v_1 + v_2$, $w_2 = v_1 + v_3$ a $w_3 = v_2 + v_3$ lineárne nezávislé? *Pomôcka:* Predpokladajte $c_1w_1 + c_2w_2 + c_3w_3 = 0$ a nájdite vhodné c_i.

9. (2.3.13) Nájdite dimenzie priestorov:
a) priestor vektorov v $\mathbb{R}^4$, ktorých zložky v súčte dávajú nulu,
b) nulový priestor (jadro) identickej matice typu 4×4,
c) priestor všetkých matíc typu 4×4,

d) priestor všetkých antisymetrických matíc typu 4×4.

10. Riešte systém lineárnych rovníc $Ax = b$, kde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{a} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) v obore $\mathbb{Q}$, b) v $\mathbb{Z}_2$, c) v $\mathbb{Z}_3$, d) v $\mathbb{Z}_7$.

Aké sú dimenzie stĺpcového (resp. riadkového) priestoru matice A, keď sa na stĺpce (resp. riadky) pozeráme ako na vektory v $\mathbb{Q}^3$, $\mathbb{Z}_2^3$, $\mathbb{Z}_3^3$ a v $\mathbb{Z}_7^3$?