Lineárna algebra – Domáca úloha č. 5

Pre týždeň 26. októbra 2009.

---

1. (2.3.15) Predpokladajme, že priestor V má dimenziu k. Ukážte, že
a) ľubovoľných k lineárne nezávislých vektorov vo V tvorí jeho bázu,
b) ľubovoľných k vektorov, ktoré generujú celé V tvorí jeho bázu.

2. (2.3.17) Ukážte, že ak V a W sú trojrozmerné podpriestory priestoru $\mathbb{R}^5$, potom existuje nenulový vektor patriaci do V aj W, teda $V \cap W \neq \{0\}$.

3. (2.3.20) a) V priestore matíc typu 2×2 nájdite bázu podpriestoru P – matíc, pre ktoré sa súčty zložiek v riadkoch aj stĺpcoch rovnajú. Teda

$$P = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a + b = c + d = a + c = b + d \right\}.$$

b) Nájdite päť lineárne nezávislých matíc typu 3×3 s touto vlastnosťou.

4. (2.3.18, 2.3.22, 2.4.21) Pravda/nepravda. Zdôvodnite.
a) Ak sú stĺpce matice A lineárne nezávislé, potom má systém $Ax = b$ práve jedno riešenie pre každé b.
b) Matica typu 5×7 nikdy nemôže mať lineárne nezávislé stĺpce.
c) Každá báza podpriestoru W sa dá rozšíriť na bázu priestoru V. (predpokladajme $\dim W \neq \dim V$)
d) Každá báza priestoru V sa dá zredukovať na bázu podpriestoru W. (opäť $\dim W \neq \dim V$)
e) Ak sú štyri základné podpriestory matice A rovnaké ako tie pre maticu B, potom $A = B$.

5. (2.4.3) a) Nájdite dimenzie a bázy pre všetky štyri základné podpriestory pre matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

6. (2.4.6) Ukážte, že systém $Ax = b$ má riešenie práve vtedy, ak hodnosť$(A) =$ hodnosť(A'), kde matica A' je matica, ktorú získame z A pridaním b ako stĺpca navyše.

7. (2.4.12) Nech $Ax = 0$ má netriviálne riešenie. Ukážte, že $A^T y = f$ nebude mať riešenie pre nejaké f. Nájdite príklad takého A a f.

8. (2.4.17) (*Paradox*) Majme pravú inverznú maticu k A, teda $AB = I$. Po prenásobení maticou A^T dostaneme $A^T AB = A^T$, z čoho $B = (A^T A)^{-1} A^T$. Ale potom $BA = I$, t.j. B by mala byť aj *ľavá* inverzná matica k A. Ktorý krok v tomto "dôkaze" je nekorektný?

9. (2.4.20) Nájdite maticu s požadovanými vlastnosťami, alebo dokážte, že taká nemôže existovať.
a) Stĺpcový priestor obsahuje $\left[\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right]$, $\left[\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right]$, riadkový priestor obsahuje $\left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right]$, $\left[\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right]$.
b) Stĺpcový priestor má bázu $\left[\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right]$, nulový priestor má bázu $\left[\begin{smallmatrix}1\\2\\1\end{smallmatrix}\right]$.
c) Stĺpcový priestor $= \mathbb{R}^4$, riadkový priestor $= \mathbb{R}^3$.