# Lineárna algebra – Domáca úloha č. 6

Pre týždeň 2. novembra 2009. Obsahuje aj nejaké príklady z predchadzajúcich kapitol ako prípravu na písomku.

---

**1.** (1.6.5) Ak $B$ je inverzná matica k $A^2$, ukážte, že inverzná matica k (štvorcovej) $A$ bude $AB$.
*Pozn.* Uvedomte si, že to znamená, že $A$ je invertibilná práve vtedy, keď $A^2$ je. Ako by sa toto tvrdenie dalo dokázať pomocou skúmania hodností, nulových resp. stĺpcových priestorov matíc $A$ a $A^2$?

**2.** (1.7.5) Nájdite inverznú maticu pre $3 \times 3$ Hilbertovu maticu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

pomocou Gaussovej emiminácie dvoma spôsobmi – najprv presným výpočtom so zlomkami, potom so zaokrúhlovaním každej zložky na tri platné číslice. Porovnajte.

**3.** (1.R.6,7) a) Existuje 16 rôznych $2 \times 2$ matíc so zložkami 0 alebo 1. Koľko z nich je invertibilných?
b) Podobne, máme šesťnásť rôznych $2 \times 2$ matíc so zložkami 1 alebo $-1$. Koľko z nich je invertibilných?
c) (o dosť ťažšie) Ak náhodne vpíšeme nuly a jednotky do $10 \times 10$ matice, je pravdepodobnejšie, že bude regulárna alebo singulárna?

**4.** (1.R.10) Nájdite inverzné matice, ak existujú, pre:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{a} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ako by vyzerali inverzné matice pre $n \times n$ matice v takomto tvare? Čo by sa stalo, ak by sme v nich zmenili dvojky na nejaký všeobecný parameter $k$?

**5.** (1.R.18) Predpokladajme, že $4 \times 4$ matica $A$ má tvar :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & v_1 & 0 & 0 \\ 0 & v_2 & 0 & 0 \\ 0 & v_3 & 1 & 0 \\ 0 & v_4 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

teda ide o maticu, ktorá vznikla z jednotkovej nahradením druhého stĺpca nejakým vektorom $v$.
a) Akú podmienku musí spĺňať vektor $v$, aby bola matica $A$ regulárna?
*Návod:* skúste sa pozrieť na priestor $\mathcal{S}(A)$.
b) Pre regulárne $A$ nájdite jej $LU$ rozklad.
c) Pre regulárnu $A$ nájdite aj $A^{-1}$.

**6.** (2.R.13) Pomocou eliminácie nájdite rozklad matice $A = LU$, ak

$$A = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{bmatrix}.$$

Akú podmienku musia spĺňať čísla $a, b, c, d$ aby boli stĺpce $A$ lineárne nezávislé?

**7.** (2.6.3) Rozhodnite, či zloženie piatich osových symetrií a ôsmimich rotácí roviny dá rotáciu alebo osovú symetriu. Záleží na poradí v ktorom tieto transforácie robíme?

**8.** (2.6.5) Priamku prechádzajúcu cez koncové body vektorov $u$ a $v$ môžeme reprezentovať ako koncové body množiny vektorov $P = \{tu + (1-t)v \,|\, t \in \mathbb{R}\}$. Ukážte, že každá lineárna tansformácia $\alpha$ zobrazuje priamku na priamku. Tiež ukážte, že stred úsečky tvorenej koncovými bodmi vektorov $x$ a $y$ sa zobrazí na stred úsečky z $\alpha(x)$ do $\alpha(y)$.

**9.** (2.6.7) Nájdite matice typu $3 \times 3$ reprezentujúce transformácie v $\mathbb{R}^3$, ktoré
i) sprojektujú každý vektor do roviny $xy$,
ii) zobrazia každy vektor symetricky podľa roviny $xy$,
iii) otočia rovinu $xy$ o uhol $\gamma$, nechajúc os $z$ namieste,
iv) otočia rovinu $xy$, potom rovinu $xz$ a nakoniec rovinu $yz$, vždy o $90°$,
v) spravia tie isté rotácie ako v iv) len vždy o $180°$.

**10.** (2.6.9) Nájdite maticu lineárnej transformácie (je to naozaj lineárna transformácia?) z priestoru polynómov $P_3(t)$ do priestoru $P_4(t)$, ktorá každému polynómu priradí jeho $(2+3t)$-násobok.

**11.** (2.6.13) Predpokladajme, že $A$ je lineárna transformácia roviny $xy$ reprezentovaná maticou $M$. Ukážte, že ak existuje zobrazenie $A^{-1}$, potom je aj ono lineárnou transformáciou. Vysvetlite prečo matica $M^{-1}$ reprezentuje $A^{-1}$.

**12.** (2.6.16) Priestor všetkých matíc typu $2 \times 2$ má štyri bázové "vektory"

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ukážte, že operácia *transpozície* je lineárnou transformáciou na tomto priestore a nájdite príslušnú maticu $A$ v tejto báze. Prečo platí $A^2 = I$?

**13.** (2.6.21) Lineárna transformácia posielajúca vektor tvaru $(x_1, x_2, x_3)$ do $(x_2, x_3, x_1)$ je rotácia. Nájdite jej os a uhol.