Lineárna algebra – Domáca úloha č. 7

Cvičenia v týždni 9. novembra 2009. Obsahuje aj nejaké príklady z predchadzajúcich kapitol ako prípravu na písomku.

---

1. (1.R.15) Nájdite hodnotu c v nasledujúcej $n \times n$ inverznej matici:

$$\text{ak } A = \begin{bmatrix} n & -1 & \cdot & -1 \\ -1 & n & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & -1 & \cdot & n \end{bmatrix}, \text{ potom } A^{-1} = \frac{1}{n+1} \begin{bmatrix} c & 1 & \cdot & 1 \\ 1 & c & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \cdot & c \end{bmatrix}.$$

Pozn. n vo veľkosti $n \times n$ matice a n vovnútri matice A je to isté n.

2. (2.R.3) Pravda/Nepravda (nájdite zdôvodnenie, resp. protipríklad):
a) Ak vektory $x_1, x_2, \ldots, x_m$ generujú priestor S, potom $\dim S = m$.
b) Prienik dvoch podpriestorov vektorového priestoru X nemôže byť prázdny.
c) Ak $Ax = Ay$, potom $x = y$.
d) Ak má štovrcová matica A lineárne nezávisle stĺpce, potom ich má aj matica A^2.

3. (2.R.9) Vo vektorovom priestore matíc typu 2×2,
a) budú tvoriť matice s hodnosťou 1 vektorový podpriestor?
b) bude podpriestor generovaný permutačnými maticami vyzerať ako?
c) bude podpriestor generovaný kladnými maticami (t.j. všetky $a_{ij} > 0$) vyzerať ako?
d) bude podpriestor generovaný invertibilnými maticami vyzerať ako?

4. (2.R.10) Vymyslite vektorový priestor, ktorý obsahuje všetky lineárne transformácie z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$. Musíte definovať sčítanie lineárnych transformácií, ako aj násobenie skalárom. Aká bude dimenzia takéhoto priestoru?

5. (2.R.17) Ak pre vektor $x \in \mathbb{R}^n$ platí $x^T y = 0$ pre každé $y \in \mathbb{R}^n$, ukážte, že $x = 0$.

6. (2.R.18) Ak A je $n \times n$ matica spĺňajúca $A^2 = A$ a A má hodnosť n, potom ukážte, že $A = I$.

7. (2.R.20) Koľko 5×5 permutačných matíc existuje? Sú lineárne nezávislé v $M_{5,5}$? Generujú celý priestor $M_{5,5}$ matíc typu 5×5? (Netreba ich vypisovať všetky)

8. (2.R.22) a) Akú podmienku musí spĺňať pravá strana b, aby mal systém $Ax = b$ riešenie, ak

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}?$$

b) Nájdite bázu nulového priestoru matice A.
c) Nájdite všeobecné riešenie systému $Ax = b$, ak riešenie existuje.
d) Nájdite bázu stĺpcového priestoru matice A.
e) Aká je hodnosť matice A^T?

9. (2.R.23) Ako by sa dala skonšturovať matica, ktorá zobrazí vektory štandardnej bázy e_1, e_2, e_3 na dané vektory v_1, v_2, v_3? Kedy bude takáto matica invertibilná?

10. (3.1.6) V $\mathbb{R}^3$ nájdite všetky vektory, ktoré sú kolmé na vektory $(1, 1, 1)$ a $(1, -1, 0)$. Vytvorte z týchto vektorov bázu $\mathbb{R}^3$, v ktorej budú všetky vektory navzájom ortogonálne a budú mať jednotkovú dĺžku (tvoria tzv. *ortonormálnu* bázu).

11. (3.1.8) Nech V a W sú ortogonálne podpriestory. Ukážte, že iba nulový vektor patrí do oboch z nich, t.j. $V \cap W = \{0\}$.

12. (3.1.11) Tvrdenie o riešiteľnosti systémov lineárnych rovníc sa dá formulovať pomocou tzv. *Fredholmovej alternatívy*: pre každé A a b má práve jeden zo systémov riešenie

$$\text{(i)} \quad Ax = b \qquad\qquad \text{(ii)} \quad A^T y = 0, \quad y^T b \neq 0.$$

Inými slovami, buď b patrí do stĺpcového priestoru $\mathcal{S}(A)$ alebo existuje y v $\mathcal{N}(A^T)$ také, že $y^T b \neq 0$. Ukážte, že rovnice (i) a (ii) nemôžu mať riešenie zároveň.

13. (3.1.14) Ukážte, že $x - y$ je kolmé na $x + y$ práve vtedy, keď $\|x\| = \|y\|$.

14. (3.1.19) Pravda/Nepravda. Zdôvodnite.
a) ak V je ortogonálne k W, potom aj $V^\perp$ je ortogonálne k $W^\perp$,
b) Ak V je ortogonálne k W a W je ortogonálne k Z, potom aj V je ortogonálne k Z.

15. (3.1.22) Nech S je podpriestor $\mathbb{R}^4$ tvorený vektormi spĺňajúcimi $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Nájdite bázu priestoru $S^\perp$, t.j. priestoru vektorov kolmých na S.

16. (2.6.19) Vo vektorovom priestore $P_3(t)$ polynómov stupňa 3, t.j. $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$, majme podmnožinu S polynómov spĺňajúcich $\int_0^1 p(t)dt = 0$. Overte, že S je podpriestor a nájdite jeho bázu.

Pozn. Použite vzorec $\int_0^1 t^k dt = \frac{1}{k+1}$.