Lineárna algebra – Domáca úloha č. 8

Cvičenia v týždni 23. novembra 2009

1. (3.1.17) Nech V je ortogonálny doplnok podpriestoru W v $\mathbb{R}^n$. Existuje matica, ktorej riadkový priestor je V a nulový priestor je W? Vychádzajúc z bázy priestoru V, ukážte ako by sa skonštruovala taká matica.

2. (3.1.20) Nech S je podpriestor $\mathbb{R}^n$. Vysvetlite, čo znamená rovnosť $(S^\perp)^\perp = S$ a prečo platí.

3. (3.2.3) Aký násobok vektora $a = (1, 1, 1)$ je najbližšie k bodu $b = (2, 4, 4)$? Nájdite tiež najbližší bod k bodu a na priamke prechádzajúcej cez b.

4. (3.2.5) Aký uhol zviera vektor $(1, 1, \dots, 1)$ v $\mathbb{R}^n$ so súradnicovými osami? Ako vyzerá projekcia na priamku danú týmto vektorom?

5. (3.2.8) Molekula metánu CH_4 vyzerá tak, že atóm uhlíka je v strede pravidelného štvorstena a štyri atómy vodíka sú v jeho vrcholoch. Ak si za vrcholy vyberieme body $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ a $(0, 1, 1)$, potom dĺžky všetkých hrán medzi nimi budú $\sqrt{2}$, teda naozaj ide o pravidelný štvorsten. Aký je kosínus uhla medzi úsečkami spájajúcimi stred $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ s vrcholmi? Aká je veľkosť tohto uhla?

6. (3.2.11) a) Nájdite projekčnú maticu P_1 zobrazujúcu rovinu $\mathbb{R}^2$ na priamku danú vektorom $a = \left[\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}\right]$ a maticu P_2 zobrazujúcu rovinu na priamku s ňou kolmú.
b) Vypočítajte $P_1 + P_2$ a $P_1 P_2$. Vysvetlite.

7. (3.2.13) Ukážte, že *stopa* matice $P = aa^T/a^Ta$ – t.j. súčet zložiek na jej diagonále – sa vždy rovná 1.

8. (3.2.16) Predpokladajme, že P je projekčná matica na priamku prechádzajúcu cez a.
a) prečo je skalárny súčin vektorov x a Py rovnaký ako skalárny súčin vektorov Px a y?
b) sú aj uhly medzi nimi rovnaké? Porovnajte ich kosínusy pre $a = (1, 1, -1)$, $x = (2, 0, 1)$ a $y = (2, 1, 2)$.
c) Prečo je skalárny súčin vektorov Px a Py opäť rovnaký? Aký je uhol medzi týmito dvoma vektormi?

9. (3.3.4) Pre nasledujúce A, x a b rozpíšte chybový člen $E^2 = \|Ax - b\|^2$ ako kvadratickú funkciu dvoch premenných u a v.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Nájdite rovnicu, vyjadrujúcu fakt, že derivácia E^2 vzhľadom na u (resp. v) je nulová. Porovnajte tieto rovnice s $A^TA\overline{x} = A^Tb$ a presvedčte sa, že analýza dáva tie isté normálové rovnosti ako geometria. Nájdite riešenie $\overline{x}$ a projekciu $p = A\overline{x}$. Prečo platí $p = b$?

10. (3.3.6) Nájdite projekciu vektora b do stĺpcového priestoru matice A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Rozložte b na zložku p patriacu do stĺpcového priestoru a zložku r kolmú na tento priestor. Do ktorého zo štyroch základných podpriestorov patrí vektor r?

11. (3.3.9) a) Ak $P = P^TP$, ukážte, že P je projekčnou maticou.
b) Na aký podpriestor zobrazuje projekčná matica $P = 0$?

12. (3.3.10) Ak sú vektory a_1, a_2 (stĺpce matice A) a b vzájomne ortogonálne, čo výjde pri počítaní A^TA a A^Tb? Aká je projekcia vektora b na rovinu danú vektormi a_1 a a_2?

13. (3.3.11) Predpokladajme, že P je projekčná matica zobrazujúca na podpriestor S a Q je projekčná matica zobrazujúca na jeho ortogonálny doplnok $S^{\perp}$. Čo budú $P+Q$ a PQ? Ukážte, že matica $P-Q$ je sama sebe inverznou.

14. (3.3.12) Ak V je podpriestor generovaný vektormi $(1,1,0,1)$ a $(0,0,1,0)$ nájdite
a) bázu ortogonálneho doplnku $V^{\perp}$,
b) projekčnú maticu P zobrazujúcu na V,
c) vektor vo V, ktorý je najbližšie k vektoru $b=(0,1,0,-1)$ z $V^{\perp}$.

15. (3.3.26) Mladý odborný asistent bol natiahnutý na škripci na dĺžky $L = 175, 180$ a 185 centimetrov pri aplikovaní sily zodpovedajúcej tiaži $F = 1, 2$ a 4 tony. Ak predpokladáme, že platí Hookov zákon $L = a + bF$, nájdite jeho pokojovú dĺžku a metódou najmenších štvorcov.