Lineárna algebra – Domáca úloha č. 9

Cvičenia v týždni 30. novembra 2009

---

1. (3.4.2) Nájdite projekcie vektora $b = (0, 3, 0)$ na priamky dané navzájom ortogonálnymi vektormi $a_1 = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$ a $a_2 = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. Nájdite projekciu vektora b na rovinu generovanú a_1 a a_2.

2. Ukážte, že ortogonálna matica, ktorá je zároveň hornou trojuholníkovou musí byť diagonálna.

3. (3.4.4) Nech Q_1 a Q_2 sú ortogonálne matice (t.j. spĺňajú $Q^T Q = I$). Ukážte, že aj súčin $Q_1 Q_2$ je ortogonálna matica. Ak matica Q_1 reprezentuje otočenie (v $\mathbb{R}^2$) o uhol θ a matica Q_2 otočenie o uhol ϕ, čo bude $Q_1 Q_2$? Čo bude $Q_2 Q_1$? Nájdite súčtové vzorce pre $\sin(\theta + \phi)$ a $\cos(\theta + \phi)$ v súčine $Q_1 Q_2$.

4. (3.4.5) Nech u je jednotkový vektor. Ukážte, že $Q = I - 2u^T u$ je ortogonálna matica. Táto matica reprezentuje súmernosť podľa nadroviny $\rho = \{x \mid a^T x = 0\}$ a nazýva sa Householderova transformácia. Skúste si nakresliť obrázok, projekciu na priamku danú vektorom u, atď. Vypočítajte Q pre $u^T = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

5. (3.4.6) Nájdite tretí stĺpec matice

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-3}{\sqrt{14}} & \end{bmatrix}$$

tak, aby bola ortogonálna (t.j. $Q^T Q = I$). Musí to byť vektor jednotkovej dĺžky, ortogonálny na zvyšné dva stĺpce – koľko voľnosti vlastne zostáva? Ukážte, že potom budú aj riadky matice Q ortonormálne.

6. (3.4.9) Ak sú vektory q_1, q_2 a q_3 ortonormálne, ktorá lineárna kombinácia q_1 a q_2 je nabližšie ku q_3?

7. (3.4.13) Použite Gram-Schmidtov proces na vektory

$$a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a vyjadrite výsledok v tvare $A = QR$.

8. (3.4.27) Nájdite ortonormálnu bázu pre podpriestor generovaný vektormi $a_1 = (1, -1, 0, 0)$, $a_2 = (0, 1, -1, 0)$ a $a_3 = (0, 0, 1, -1)$.

9. Nájdite príklad podpriestorov V a W v $\mathbb{R}^3$ tak, aby $V \cap W$ obsahovalo iba nulový vektor ale V nebol ortogonálny na W.

10. (3.R.19) Ukážte, že ak vektory $v_1, \ldots, v_n$ tvoria ortonormálnu bázu $\mathbb{R}^n$, potom $v_1 v_1^T + \cdots + v_n v_n^T = I$.

11. (3.R.20) *Pravda/Nepravda:* Ak vektory x a y sú ortogonálne a P je projekcia, potom Px a Py sú ortogonálne. Zdôvodnite.

12. (3.R.31) Ukážte, že vzdialenosť nadroviny $a^T x - c = 0$ od počiatku v $\mathbb{R}^m$ je $|c|/\|a\|$. Ako ďaleko je nadrovina $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 8$ od počiatku a ktorý jej bod je k nemu najbližšie?

13. Majme vektory $a_1 = (1, 1, 1)$ a $a_2 = (1, -1, 1)$. Maticu projekcie na vektor a_1 označme P_1 a maticu projekcie na vektor a_2 oznažme P_2. T.j. $P_i = \frac{a_i a_i^T}{a_i^T a_i}$. Nájdite maticu projekcie P na rovinu generovanú vektormi a_1, a_2 a presvedčte sa, že $P \neq P_1 + P_2$. Akú podmienku by museli spĺňať vektory a_1, a_2 aby takáto rovnosť platila?