Lineárna algebra – Domáca úloha č. 10

Cvičenia v týždni 7. decembra 2009

---

1. (3.4.18) Ak $A = QR$ nájdite jednoduchý vzorec pre projekčnú maticu P zobrazujúcu do stĺpcového priestoru A.

2. (3.4.24) Nájdite nasledujúce Legendrove polynómy – t.j. polynómy stupňa 3 a 4 ortogonálne na 1, x a $x^2 - \frac{1}{3}$ na intervale $\langle -1, 1 \rangle$.

3. (3.6.1) Nech S a T sú podpriestory $\mathbb{R}^{13}$ s dimenziami $\dim S = 7$ a $\dim T = 8$.
a) Aká je najväčšia možná dimenzia $S \cap T$?
b) Aká je najmenšia možná dimenzia $S \cap T$?
c) Aká je najmenšia možná dimenzia $S + T$?
d) Aká je najväčšia možná dimenzia $S + T$?

4. (3.6.6) Ak $V \cap W = \{0\}$, potom sa súčet $V + W$ nazýva *priamy súčet* priestorov V a W. Značíme $V \oplus W$. Ak je V generovaný vektormi $(1, 1, 1)$ a $(1, 0, 1)$, nájdite W aby $V \oplus W = \mathbb{R}^3$.

5. (3.6.7) Zdôvodnite, prečo sa každý vektor x v priamom súčte $V \oplus W$ dá *jednoznačne* vyjadriť ako $x = v + w$ pre $v \in V$ a $w \in W$.

6. (3.6.8) Priestor V je generovaný vektormi $v_1 = (1, 1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1, 0)$ a priestor W vektormi $w_1 = (0, 1, 0, 1)$ a $w_2 = (0, 0, 1, 1)$. Nájdite bázu súčtu $V + W$, ako aj bázu a dimenziu prieniku $V \cap W$.

7. (3.6.17) Nájdite faktorizáciu $A = LDL^T$ a potom tzv. *Choleského* faktory $(LD^{1/2})(LD^{1/2})^T$ pre maticu

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 45 \end{bmatrix}.$$

8. (3.R.24, 25) Tomograf (ľudovo "CT-čko") sníma pacienta z rôznych smerov röntgenovými lúčmi a potom vyprodukuje maticu udávajúcu hustotu kostí a tkanív v každom bode. Z matematického hľadiska ide o zistenie zložiek matice z jej projekcií.

Vieme zrekonštruovať 2×2 maticu A, ak poznáme súčty zložiek v každom jej riadku a stĺpci?

Podobne, vieme v 3×3 prípade zrekonštruovať maticu A ak poznáme súčty zložiek v každom riadku, v každom stĺpci ako aj súčty pozdĺž hlavnej diagonály a susedných dvoch diagonál s ňou rovnobežných?

9. (3.R.39) Ako vyzerá matica $A^T A$ ak sú stĺpce matice A ortogonálne? Ako keď sú ortonormálne?

10. (4.2.15) Nájdite determinanty pre nasledujúce matice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad A - \lambda I = \begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix}.$$

Pre akú hodnotu parametra λ je $A - \lambda I$ singulárna?