Lineárna algebra a geometria I. – Domáca úloha č. 11

Pre týždeň 14. decembra 2009.

---

1. (4.2.1) Ako súvisia hodnoty determinantov $\det(2A)$, $\det(-A)$ a $\det(A^2)$ s hodnotou determinantu $\det(A)$ pre $n \times n$ maticu A?

2. (4.2.4) Ukážte prečo

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 \qquad \text{a} \qquad \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -1.$$

3. (4.2.5) Koľko výmen riadkov potrebujeme, na to aby sme prešli od matice A k matici I:

$$A = \begin{bmatrix} e_n^T \\ e_{n-1}^T \\ \dots \\ e_1^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ & \dots & & \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad I = \begin{bmatrix} e_1^T \\ e_2^T \\ \dots \\ e_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}?$$

Kedy je $\det A = 1$ a kedy $\det A = -1$? (V príklade 4.2.4 sme mali $n = 4$ a $\det A = 1$)

4. (4.2.10) Použitím riadkových operácií overte, že determinant 3×3 Vandermondovej matice je

$$\det \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

Skúste vypočítať aj pre 4×4 matice.

5. (4.2.11) a) Antisymetrická matica spĺňa $K^T = -K$, napríklad

$$K \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}.$$

Vysvetlite prečo v 3×3 prípade platí $\det(-K) = (-1)^3 \det K$. Zároveň $\det K^T = \det K$ (toto platí vždy). Z toho vyvoďte, že taká matica má nulový determinant.
b) Nájdite antisymetrickú 4×4 maticu s nenulovým determinantom.

6. (4.2.13) Ak v matici A je súčet zložiek v každom riadku nula, ukážte, že $\det A = 0$. Ak je súčet zložiek v každom riadku 1, ukážte, že $\det(A - I) = 0$. Nájdite takú maticu A, pre ktorú z toho nevyplýva, že $\det A = 1$.

7. (4.2.14) Pre nasledujúce matice nájdite determinanty použitím Gaussovej eliminácie:

$$\begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{bmatrix} \qquad \text{a} \qquad \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \\ t & 1 & t & t^2 \\ t^2 & t & 1 & t \\ t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix}.$$

8. (4.2.17) Predpokladajme, že $CD = -DC$. Nájdite chybu v nasledujúcom dôvodení: Zoberúc determinanty, dostávame $(\det C)(\det D) = -(\det D)(\det C)$, čiže aspoň jedna z matíc C alebo D musí mať nulový determinant. Preto rovnosť $CD = -DC$ môže nastať iba ak C alebo D je singulárna.

9. (4.3.1) Pre maticu

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

nájdite (jedinú) permutáciu, ktorá bude zodpovedať nenulovému členu vo vzorci pre výpočet determinantu. Rozhodnite, či táto permutácia je párna alebo nepárna a vypočítajte $\det A$.

10. (4.3.3) *Pravda / Nepravda:* (1) Determinant súčinu $S^{-1}AS$ sa rovná determinantu matice A.
(2) Ak $\det A = 0$, potom aspoň jeden člen v rozvoji na $(n-1) \times (n-1)$ kofaktory musí byť nula.
(3) Matica, ktorej zložky sú iba nuly a jednotky má determinant 1, 0 alebo -1.

11. (4.3.5) Nech D_n je determinant $(1, 1, -1)$-tridiagonálnej matice typu $n \times n$:

$$D_n = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ 1 & 1 & -1 & & \\ & 1 & 1 & -1 & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Overte, že rozvojom podľa prvého riadku dostaneme $D_n = D_{n-1} + D_{n-2}$, čo je predpis pre *Fibonacciho postupnosť* $1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

12. (4.3.8) Vysvetlite, prečo bude mať 5×5 matica s nulovou 3×3 podmaticou nulový determinant bez ohľadu na to, aké hodnoty budú na miestach označených $*$:

$$\text{determinant matice } A = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{bmatrix} \text{ je vždy nulový.}$$

13. (4.3.10) Vypočítajte determninant matice

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

buď elimináciou alebo rozvojom podľa riadku. Nájdite tiež determinanty menších matíc A_3 a A_2 – s nulami na diagonále a jednotkami na ostatných miestach. Vedeli by ste predpovedať hodnotu $\det A_n$?

14. (4.R.16) Nájdite $\det A$ ak $a_{ij} = i + j$.