Lineárna algebra – Domáca úloha č. 12

Na precvičenie učiva z posledného týždňa semestra, pred skúškou.

---

**1.** (4.R.19) Vysvetlite prečo bude bod $(x, y)$ ležať na priamke prechádzajúcej cez body $(2, 8)$ a $(4, 7)$ vtedy, ak

$$\det \begin{bmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 8 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix} = 0, \qquad \text{alebo} \qquad x + 2y - 18 = 0.$$

**2.** (4.R.23) Ak $C = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ a $D = \left[\begin{smallmatrix} u & v \\ w & z \end{smallmatrix}\right]$, potom rovnicu $CD = -DC$ môžeme prepísať ako

$$CD + DC = 0 \qquad \text{alebo} \qquad \begin{bmatrix} 2a & c & b & 0 \\ b & a+d & 0 & b \\ c & 0 & a+d & c \\ 0 & c & b & 2d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Nájdite determinant tejto $4 \times 4$ matice $A$.
(b) Ukážte, že $\det A = 0$ ak $a + d = 0$ alebo $ad - bc = 0$.
Vo všetkých ostatných prípadoch môže nastať $CD = -DC$ iba pre $D = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$.

**3.** (4.3.9) Ukážte, že pre pre všeobecné matice typu $4 \times 4$ rozdelené na podbloky veľkosti $2 \times 2$ platí

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} = \det A \det D, \qquad \text{ale} \qquad \det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \neq \det A \det D - \det B \det C.$$

**4.** (4.3.12) Zistite aké znamienko prislúcha v determinante $5 \times 5$ matice súčinu $a_{15}a_{24}a_{33}a_{42}a_{51}$. Inými slovami, je permutácia $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ párna alebo nepárna?

**5.** (4.3.13) Ak matica $A$ je typu $m \times n$ a $B$ je typu $n \times m$, ukážte, že

$$\det \begin{bmatrix} 0 & A \\ -B & I \end{bmatrix} = \det AB. \qquad \left(\textit{Pomôcka:} \text{ vynásobte sprava maticou } \det \begin{bmatrix} I & 0 \\ B & I \end{bmatrix}\right)$$

Overte túto rovnosť na nejakom príklade s $m < n$ a inom s $m > n$. Prečo v druhom prípade vždy dostaneme $\det AB = 0$?

**6.** (4.4.1) Nájdite determinant a všetkých deväť členov $A_{ij}$ pre maticu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Overte, že $A$ krát $A_{\text{adj}}$ je $(\det A)$-násobok jednotkovej matice. Nájdite $A^{-1}$.

**7.** (4.4.6) a) Nájdite determinant matice $M$, ktorá vznikne z jednotkovej matice nahradením $j$-teho stĺpca vektorom $x$:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & & x_1 & & \\ & 1 & \cdot & & \\ & & x_j & & \\ & & \cdot & 1 & \\ & & x_n & & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Ak $Ax = b$, ukážte, že matica $AM$ je rovná matici $B_j$ z Cramerovho pravidla ($B_j$ vznikne z matice $A$ nahradením $j$-teho stĺpca pravou stranou $b$).
c) Odvoďte Cramerovo pravidlo zobraním determinantov v rovnosti $AM = B_j$.

**8.** (4.4.8) a) Načrtnite trojuholník s vrcholmi $A = (2, 2)$, $B = (-1, 3)$ a $C = (0, 0)$. Považujúc tento trojuholník za polovicu nejakého rovnobežníka (ktorého?), vysvetlite prečo je jeho obsah

$$\text{obsah}(ABC) = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

b) Predpokladajme, že tretí vrchol tentoraz bude $C = (1, -4)$. Zdôvodnite platnosť vzorca:

$$\text{obsah}(ABC) = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Pomôcka:* odpočítaním tretieho riadku od prvých dvoch dostaneme:

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ -2 & 7 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}.$$

**9.** (4.4.9) Vysvetlite, ak chápeme determinant ako objem, prečo $\det 3A = 3^n \det A$ pre maticu $A$ typu $n \times n$.

**10.** (4.4.13) Nájdite všetky nepárne permutácie množiny $\{1, 2, 3, 4\}$. Takéto permutácie pochádzajú zo zloženia nepárneho počtu riadkových výmen. Potom pre determinant príslušnej matice platí $\det P_\sigma = -1$.

**11.** (4.4.14) Nech $\sigma$ je permutácia, ktorá zobrazí $(1, 2, 3, 4, 5)$ na $(5, 4, 1, 2, 3)$.

(a) Kam zobrazí $\sigma^2$ päticu $(1, 2, 3, 4, 5)$?

(b) Kam zobrazí $\sigma^{-1}$ päticu $(1, 2, 3, 4, 5)$?

**12.** (4.4.16) Ukážte, že ak budeme postupne násobiť maticu $A$ zľava tou istou permutačnou maticou $P$ – t.j. budeme opakovať tú istú výmenu riadkov, niekedy sa prvý riadok opäť objaví na svojom pôvodnom mieste. Skúste tiež ukázať, že pre nejaké $m$ dostaneme po $m$ výmenách pomocou matice $P$ naspäť pôvodnú maticu $A$, teda $P^m A = A$.

**13.** (4.R.8,9) a) Ak sú zložky matice $A$ celé čísla a $\det A$ je 1 alebo $-1$, ukážte, že aj zložky matice $A^{-1}$ budú celočíslené. Nájdite nejaký $2 \times 2$ príklad (nediagonálny).

b) Ak sú zložky matíc $A$ aj $A^{-1}$ všetky celočíslené, ukážte, že oba determinanty sú 1 alebo $-1$. *Pomôcka:* Aký je determinant súčinu $AA^{-1}$?

**14.** (4.4.11) Aký je objem rovnobežnostena, ktorého štyri vrcholy sú $(0, 0, 0)$, $(-1, 2, 2)$, $(2, -1, 2)$ a $(2, 2, -1)$? Aké sú ďalšie štyri jeho vrcholy?

**15.** (4.4.15) Nech matica $P_1$ zodpovedá nejakej párnej permutácii a $P_2$ nejakej nepárnej. Odvoďte zo vzťahu $P_1 + P_2 = P_1(P_1^T + P_2^T)P_2$ to, že $\det(P_1 + P_2) = 0$.

**Príklad od Dr. Djordje Miličevića:** Majme maticu $A$ typu $2007 \times 2008$ a maticu $B$ typu $2008 \times 2007$. Je možné aby platilo $\det AB = 1$ a $\det BA = 2$?