Lineárna algebra – Domáca úloha č. 2

Cvičenia v týždni 4. októbra 2010

---

1. (1.4.11) Pravda/Nepravda. Zdôvodnite ak je tvrdenie pravdivé, ukážte konkrétny protipríklad ak je nepravdivé.
(i) Ak sú prvý a tretí stĺpec matice B rovnaké, potom sú rovnaké aj prvý a tretí stĺpec súčinu AB.
(ii) Ak sú prvý a tretí riadok matice B rovnaké, potom sú rovnaké aj prvý a tretí riadok súčinu AB.
(iii) Ak sú prvý a tretí riadok matice A rovnaké, potom sú rovnaké aj prvý a tretí riadok súčinu AB.
(iv) $(AB)^2 = A^2B^2$.

2. (1.4.14) Metódou pokusov a omylov s maticami typu 2×2 nájdite príklady matíc, ktoré spĺňajú:
(i) $A^2 = -I$, A má reálne zložky,
(ii) $B^2 = 0$, ale $B \neq 0$,
(iii) $CD = -DC$, pritom $CD \neq 0$,
(iv) $EF = 0$, pričom žiadna zo zložiek E a F nie je nulová.

3. (1.4.22) Matice, ktoré popisujú rotáciu roviny x-y majú tvar

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

a) Overte, že $A(\theta_1)A(\theta_2) = A(\theta_1\theta_2)$, použijúc súčtové vzorce pre sínus a kosínus.
b) Čo dostaneme súčinom $A(\theta)$ a $A(-\theta)$?

4. (1.4.23) Pre matice

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \text{a} \qquad C = AB = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

nájdite mocniny A^2, A^3, $\ldots$, B^2, B^3, $\ldots$ a C^2, C^3, $\ldots$

5. (1.5.18) Rozhodnite či sú nasledujúce systémy singulárne alebo regulárne, či nemajú ani jedno, práve jedno alebo nekonečne veľa riešení:

$$\begin{aligned} v - w &= 2 \\ u - v \phantom{{}-w} &= 2, \\ u \phantom{{}-v} - w &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} v - w &= 0 \\ u - v \phantom{{}-w} &= 0 \\ u \phantom{{}-v} - w &= 0 \end{aligned} \qquad \text{a} \qquad \begin{aligned} v + w &= 1 \\ u + v \phantom{{}+w} &= 1. \\ u \phantom{{}+v} + w &= 1 \end{aligned}$$

6. (1.6.2) a) Nájdite inverzné matice k permutačným maticiam

$$P_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{a} \qquad P_{132} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Vysvetlite prečo je pre permutačné matice P^{-1} *vždy rovnaká* ako P^T. Ukážte, že jednotky v súčine PP^T budú na správnom mieste a naozaj dostaneme $PP^T = I$.

7. (1.6.4) (a) Ak je A invertibilná matica a $AB = AC$, dôkážte, že $B = C$.
(b) Pre $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ nájdite matice B a C, pre ktoré $AB = AC$ ale $B \neq C$.

8. (1.5.5) Nájdite LU rozklad pre maticu A, ako aj lineárny systém $Ux = c$ v hornom trojuholníkovom tvare, ktorý vznikne elimináciou pre

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

9. (1.5.15 + rozšírenie) Nájdite rozklady $PA = LDU$ (a skontrolujte ich) pre

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{a} \qquad A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

V oboch prípadoch robte elimináciu tak, ako ste zvyknutí, ale navyše si zapíšte každú elementárnu maticu. V prvom prípade by Vám malo výjsť poradie P, $E_{3,1}$, $E_{3,2}$, teda rovnosť $E_{3,2}E_{3,1}PA = U$, z čoho sa už ľahko dá nájsť rozklad.

V druhom prípade by poradie malo výjsť $E'_{2,1}$, $E'_{3,1}$, P', teda rovnosť $P'E'_{3,1}E'_{2,1}A' = U'$. Matice P' a $E'_{3,1}$, resp. $E'_{2,1}$, nekomutujú, ale platí $P'E_{3,1} = F_{2,1}P'$ pre nejakú inú elementárnu maticu $F_{2,1}$, a tiež $P'E_{2,1} = F_{3,1}P'$ pre nejakú $F_{3,1}$. Ukážte, že matice $F_{2,1}$ a $F_{3,1}$ navzájom komutujú, čiže môžeme prejsť k rovnosti $P'E'_{3,1}E'_{2,1}A' = F_{3,1}F_{2,1}P'A' = U'$. Vysvetlite čo postupnosť operácií daných maticami P', $F_{2,1}$ a $F_{3,1}$ robí so systémom, a aký je význam danej maticovej rovnosti $P'E'_{3,1}E'_{2,1} = F_{3,1}F_{2,1}P'$.