

1. (1.R.15) Nájdite hodnotu  $c$  v nasledujúcej  $n \times n$  inverznej matici:

$$\text{ak } A = \begin{bmatrix} n & -1 & \cdot & -1 \\ -1 & n & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & -1 & \cdot & n \end{bmatrix}, \text{ potom } A^{-1} = \frac{1}{n+1} \begin{bmatrix} c & 1 & \cdot & 1 \\ 1 & c & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \cdot & c \end{bmatrix}.$$

Pozn.  $n$  vo veľkosti  $n \times n$  matice a  $n$  vo vnútri matice  $A$  je to isté  $n$ .

2. (2.4.3) a) Nájdite dimenzie a bázy pre všetky štyri základné podpriestory pre matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. (2.4.8) Prečo nemôže existovať matica, ktorej nulový aj riadkový priestor by obsahovali vektor  $[1, 1, 1, 1]^T$ ?

4. (2.4.12) Nech  $Ax = 0$  má netriviálne riešenie. Ukážte, že  $A^T y = f$  nebude mať riešenie pre nejaké  $f$ . Nájdite príklad takého  $A$  a  $f$ .

5. (2.4.17) (*Paradox*) Majme pravú inverznú maticu k  $A$ , teda  $AB = I$ . Po prenasobení maticou  $A^T$  dostaneme  $A^T AB = A^T$ , z čoho  $B = (A^T A)^{-1} A^T$ . Ale potom  $BA = I$ , t.j.  $B$  by mala byť aj ľavá inverzná matica k  $A$ . Ktorý krok v tomto “dôkaze” je nekorektný?

6. (2.R.3) Pravda/Nepravda (nájdite zdôvodnenie, resp. protipríklad):

- Ak vektory  $x_1, x_2, \dots, x_m$  generujú priestor  $S$ , potom  $\dim S = m$ .
- Prieknik dvoch podpriestorov vektorového priestoru  $X$  nemôže byť prázdny.
- Ak  $Ax = Ay$ , potom  $x = y$ .
- Ak má štvorcová matica  $A$  lineárne nezávislé stĺpce, potom ich má aj matica  $A^2$ .

7. (2.R.9) Vo vektorovom priestore matíc typu  $2 \times 2$ ,

- budú tvoriť matice s hodnotou 1 vektorový podpriestor?
- bude podpriestor generovaný permutačnými maticami vyzeráť ako?
- bude podpriestor generovaný kladnými maticami (t.j. všetky  $a_{ij} > 0$ ) vyzeráť ako?
- bude podpriestor generovaný invertibilnými maticami vyzeráť ako?

8. (2.R.17) Ak pre vektor  $x \in \mathbb{R}^n$  platí  $x^T y = 0$  pre každé  $y \in \mathbb{R}^n$ , ukážte, že  $x = 0$ .

9. (2.R.18) Ak  $A$  je  $n \times n$  matica spĺňajúca  $A^2 = A$  a  $A$  má hodnotu  $n$ , potom ukážte, že  $A = I$ .

10. (2.R.20) Koľko  $5 \times 5$  permutačných matíc existuje? Sú lineárne nezávislé v  $M_{5,5}$ ? Generujú celý priestor  $M_{5,5}$  matíc typu  $5 \times 5$ ? (Netreba ich vypisovať všetky)

11. (2.R.22) a) Akú podmienku musí spĺňať pravá strana  $b$ , aby mal systém  $Ax = b$  riešenie, ak

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}?$$

- Nájdite bázu nulového priestoru matice  $A$ .
- Nájdite všeobecné riešenie systému  $Ax = b$ , ak riešenie existuje.
- Nájdite bázu stĺpcového priestoru matice  $A$ .

e) Aká je hodnosť matice  $A^T$ ?

**12.** (2.6.3) Rozhodnite, či zloženie piatich osových symetrií a ôsmimich rotácií roviny dá rotáciu alebo osovú symetriu. Záleží na poradí v ktorom tieto transformácie robíme?

**13.** (2.6.7) Nájdite matice typu  $3 \times 3$  reprezentujúce transformácie v  $\mathbb{R}^3$ , ktoré

- i) sprojektujú každý vektor do roviny  $xy$ ,
- ii) zobrazia každý vektor symetricky podľa roviny  $xy$ ,
- iii) otočia rovinu  $xy$  o uhol  $\gamma$ , nechajúc os  $z$  namieste,
- iv) otočia rovinu  $xy$ , potom rovinu  $xz$  a nakoniec rovinu  $yz$ , vždy o  $90^\circ$ ,
- v) spraví tie isté rotácie ako v iv) len vždy o  $180^\circ$ .

**14.** (2.6.16) Priestor všetkých matíc typu  $2 \times 2$  má štyri bázové “vektory”

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ukážte, že operácia *transpozície* je lineárnou transformáciou na tomto priestore a nájdite príslušnú maticu  $A$  v tejto báze. Prečo platí  $A^2 = I$ ?