

1. (3.1.17) Nech V je ortogonálny doplnok podpriestoru W v \mathbb{R}^n . Existuje matica, ktorej riadkový priestor je V a nulový priestor je W ? Vychádzajúc z bázy priestoru V , ukážte ako by sa skonštruovala taká matica.

2. (3.1.20) Nech S je podpriestor \mathbb{R}^n . Vysvetlite, čo znamená rovnosť $(S^\perp)^\perp = S$ a prečo platí.

3. (3.2.3) Aký násobok vektora $a = (1, 1, 1)$ je najbližšie k bodu $b = (2, 4, 4)$? Nájdite tiež najbližší bod k bodu a na priamke prechádzajúcej cez b .

4. (3.2.5) Aký uhol zvierajú vektor $(1, 1, \dots, 1)$ v \mathbb{R}^n so súradnicovými osami? Ako vyzerá projekcia na priamku danú týmto vektorom?

5. (3.2.8) Molekula metánu CH_4 vyzerá tak, že atóm uhlíka je v strede pravidelného štvorstena a štyri atómy vodíka sú v jeho vrcholoch. Ak si za vrcholy vyberieme body $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ a $(0, 1, 1)$, potom dĺžky všetkých hrán medzi nimi budú $\sqrt{2}$, teda naozaj ide o pravidelný štvorsten. Aký je kosínus uhla medzi úsečkami spájajúcimi stred $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ s vrcholmi? Aká je veľkosť tohto uhla?

6. (3.2.11) a) Nájdite projekčnú maticu P_1 zobrazujúcu rovinu \mathbb{R}^2 na priamku danú vektorom $a = [\frac{1}{3}]$ a maticu P_2 zobrazujúcu rovinu na priamku s ňou kolmú.

b) Vypočítajte $P_1 + P_2$ a P_1P_2 . Vysvetlite.

7. (3.2.13) Ukážte, že stopa matice $P = aa^T/a^T a$ – t.j. súčet zložiek na jej diagonále – sa vždy rovná 1.

8. (3.2.16) Predpokladajme, že P je projekčná matica na priamku prechádzajúcu cez a .

a) prečo je skalárny súčin vektorov x a Py rovnaký ako skalárny súčin vektorov Px a y ?

b) sú aj uhly medzi nimi rovnaké? Porovnajme ich kosínusy pre $a = (1, 1, -1)$, $x = (2, 0, 1)$ a $y = (2, 1, 2)$.

c) Prečo je skalárny súčin vektorov Px a Py opäť rovnaký? Aký je uhol medzi týmito dvoma vektormi?

9. (3.3.4) Pre nasledujúce A , x a b rozpíšte chybový člen $E^2 = \|Ax - b\|^2$ ako kvadratickú funkciu dvoch premenných u a v .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Nájdite rovnicu, vyjadrujúcu fakt, že derivácia E^2 vzhľadom na u (resp. v) je nulová. Porovnajme tieto rovnice s $A^T A \bar{x} = A^T b$ a presvedčte sa, že analýza dáva tie isté normálové rovnosti ako geometria. Nájdite riešenie \bar{x} a projekciu $p = A\bar{x}$. Prečo platí $p = b$?

10. (3.3.6) Nájdite projekciu vektora b do stĺpcového priestoru matice A :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Rozložte b na zložku p patriacu do stĺpcového priestoru a zložku r kolmú na tento priestor. Do ktorého zo štyroch základných podpriestorov patrí vektor r ?

11. (3.3.9) a) Ak $P = P^T P$, ukážte, že P je projekčnou maticou.

b) Na aký podpriestor zobrazuje projekčná matica $P = 0$?

12. (3.3.10) Ak sú vektory a_1 , a_2 (stĺpce matice A) a b vzájomne ortogonálne, čo výjde pri počítaní $A^T A$ a $A^T b$? Aká je projekcia vektora b na rovinu danú vektormi a_1 a a_2 ?

13. (3.3.11) Predpokladajme, že P je projekčná matica zobrazujúca na podpriestor S a Q je projekčná matica zobrazujúca na jeho ortogonálny doplnok S^\perp . Čo budú $P + Q$ a PQ ? Ukážte, že matica $P - Q$ je sama sebe inverznou.

14. Predpokladajme, že $n \times n$ matica P spĺňa $P^2 = P$. Ukážte, že potom $\mathcal{S}(I - P) \subseteq \mathcal{N}(P)$.

Skúste načrtnúť zobrazenie dané maticou P a zdôvodniť prečo by mala platiť rovnosť $\mathcal{S}(I - P) = \mathcal{N}(P)$. (Ako by vyzeral vektor, ktorý by patril do $\mathcal{N}(P)$ a nepatril do $\mathcal{S}(I - P)$?)

15. (3.3.12) Ak V je podpriestor generovaný vektormi $(1, 1, 0, 1)$ a $(0, 0, 1, 0)$ nájdite

a) bázu ortogonálneho doplnku V^\perp ,

b) projekčnú maticu P zobrazujúcu na V ,

c) vektor vo V , ktorý je najbližšie k vektoru $b = (0, 1, 0, -1)$ z V^\perp .

16. (3.3.26) Mladý odborný asistent bol natiahnutý na škripci na dĺžky $L = 175, 180$ a 185 centimetrov pri aplikovaní sily zodpovedajúcej tiaži $F = 1, 2$ a 4 tony. Ak predpokladáme, že platí Hookov zákon $L = a + bF$, nájdite jeho pokojovú dĺžku a metódou najmenších štvorcov.