

1. (4.2.1) Ako súvisia hodnoty determinantov  $\det(2A)$ ,  $\det(-A)$  a  $\det(A^2)$  s hodnotou determinantu  $\det(A)$  pre  $n \times n$  maticu  $A$ ?

2. (4.2.4) Ukážte prečo

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 \quad \text{a} \quad \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -1.$$

3. (4.2.5) Koľko výmen riadkov potrebujeme, na to aby sme prešli od matice  $A$  k matici  $I$ :

$$A = \begin{bmatrix} e_n^T \\ e_{n-1}^T \\ \vdots \\ e_1^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & & & \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} e_1^T \\ e_2^T \\ \vdots \\ e_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}?$$

Kedy je  $\det A = 1$  a kedy  $\det A = -1$ ? (V príklade 4.2.4 sme mali  $n = 4$  a  $\det A = 1$ )

4. (4.2.10) Použitím riadkových operácií overte, že determinant  $3 \times 3$  Vandermondovej matice je

$$\det \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

Skúste vypočítať aj pre  $4 \times 4$  matice.

5. (4.2.11) a) Antisymetrická matica spĺňa  $K^T = -K$ , napríklad

$$K = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}.$$

Vysvetlite prečo v  $3 \times 3$  prípade platí  $\det(-K) = (-1)^3 \det K$ . Zároveň  $\det K^T = \det K$  (toto platí vždy). Z toho vyvodte, že taká matica má nulový determinant.

b) Nájdite antisymetrickú  $4 \times 4$  maticu s nenulovým determinantom.

6. (4.2.13) Ak v matici  $A$  je súčet zložiek v každom riadku nula, ukážte, že  $\det A = 0$ . Ak je súčet zložiek v každom riadku 1, ukážte, že  $\det(A - I) = 0$ . Nájdite takú maticu  $A$ , pre ktorú z toho nevyplýva, že  $\det A = 1$ .

7. (4.2.14) Pre nasledujúce matice nájdite determinanty použitím Gaussovej eliminácie:

$$\begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \\ t & 1 & t & t^2 \\ t^2 & t & 1 & t \\ t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix}.$$

8. (4.2.17) Predpokladajme, že  $CD = -DC$ . Nájdite chybu v nasledujúcom dôvodení: Zoberúc determinanty, dostávame  $(\det C)(\det D) = -(\det D)(\det C)$ , čiže aspoň jedna z matíc  $C$  alebo  $D$  musí mať nulový determinant. Preto rovnosť  $CD = -DC$  môže nastať iba ak  $C$  alebo  $D$  je singulárna.

9. (4.3.1) Pre maticu

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

nájdite (jedinú) permutáciu, ktorá bude zodpovedať nenulovému členu vo vzorci pre výpočet determinantu. Rozhodnite, či táto permutácia je párna alebo nepárna a vypočítajte  $\det A$ .

10. (4.3.3) *Pravda / Nepravda*: (1) Determinant súčiny  $S^{-1}AS$  sa rovná determinantu matice  $A$ .  
(2) Ak  $\det A = 0$ , potom aspoň jeden člen v rozvoji na  $(n-1) \times (n-1)$  kofaktory musí byť nula.  
(3) Matica, ktorej zložky sú iba nuly a jednotky má determinant 1, 0 alebo  $-1$ .

11. (4.3.5) Nech  $D_n$  je determinant  $(1, 1, -1)$ -tridiagonálnej matice typu  $n \times n$ :

$$D_n = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ 1 & 1 & -1 & & \\ & 1 & 1 & -1 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Overte, že rozvojom podľa prvého riadku dostaneme  $D_n = D_{n-1} + D_{n-2}$ , čo je predpis pre *Fibonacciho postupnosť* 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

12. (4.3.8) Vysvetlite, prečo bude mať  $5 \times 5$  matica s nulovou  $3 \times 3$  podmaticou nulový determinant bez ohľadu na to, aké hodnoty budú na miestach označených \*:

$$\text{determinant matice } A = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{bmatrix} \text{ je vždy nulový.}$$

13. (4.3.10) Vypočítajte determinant matice

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

buď elimináciou alebo rozvojom podľa riadku. Nájdite tiež determinanty menších matíc  $A_3$  a  $A_2$  – s nulami na diagonále a jednotkami na ostatných miestach. Vedeli by ste predpovedať hodnotu  $\det A_n$ ?

14. (4.R.16) Nájdite  $\det A$  ak  $a_{ij} = i + j$ .