Lineárna algebra – Domáca úloha č. 12

Na precvičenie učiva z posledného týždňa semestra, pred skúškou.

---

1. (4.R.19) Vysvetlite prečo bude bod (x, y) ležať na priamke prechádzajúcej cez body $(2, 8)$ a $(4, 7)$ vtedy, ak

$$\det \begin{bmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 8 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix} = 0, \qquad \text{alebo} \qquad x + 2y - 18 = 0.$$

2. (4.R.23) Ak $C = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ a $D = \left[\begin{smallmatrix} u & v \\ w & z \end{smallmatrix}\right]$, potom rovnicu $CD = -DC$ môžeme prepísať ako

$$CD + DC = 0 \qquad \text{alebo} \qquad \begin{bmatrix} 2a & c & b & 0 \\ b & a+d & 0 & b \\ c & 0 & a+d & c \\ 0 & c & b & 2d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Nájdite determinant tejto 4×4 matice A.
(b) Ukážte, že $\det A = 0$ ak $a + d = 0$ alebo $ad - bc = 0$.
Vo všetkých ostatných prípadoch môže nastať $CD = -DC$ iba pre $D = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$.

3. (4.3.9) Ukážte, že pre pre všeobecné matice typu 4×4 rozdelené na podbloky veľkosti 2×2 platí

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} = \det A \det D, \qquad \text{ale} \qquad \det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \neq \det A \det D - \det B \det C.$$

4. (4.3.12) Zistite aké znamienko prislúcha v determinante 5×5 matice súčinu $a_{15}a_{24}a_{33}a_{42}a_{51}$. Inými slovami, je permutácia $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ párna alebo nepárna?

5. (4.3.13) Ak matica A je typu $m \times n$ a B je typu $n \times m$, ukážte, že

$$\det \begin{bmatrix} 0 & A \\ -B & I \end{bmatrix} = \det AB. \qquad \left(\textit{Pomôcka:} \text{ vynásobte sprava maticou } \det \begin{bmatrix} I & 0 \\ B & I \end{bmatrix} \right)$$

Overte túto rovnosť na nejakom príklade s $m < n$ a inom s $m > n$. Prečo v druhom prípade vždy dostaneme $\det AB = 0$?

6. (4.4.1) Nájdite determinant a všetkých deväť členov A_{ij} pre maticu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Overte, že A krát A_{adj} je $(\det A)$-násobok jednotkovej matice. Nájdite A^{-1}.

7. (4.4.6) a) Nájdite determinant matice M, ktorá vznikne z jednotkovej matice nahradením j-teho stĺpca vektorom x:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & & x_1 & & \\ & 1 & \cdot & & \\ & & x_j & & \\ & & \cdot & 1 & \\ & & x_n & & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Ak $Ax = b$, ukážte, že matica AM je rovná matici B_j z Cramerovho pravidla (B_j vznikne z matice A nahradením j-teho stĺpca pravou stranou b).
c) Odvoďte Cramerovo pravidlo zobraním determinantov v rovnosti $AM = B_j$.

8. (4.4.8) a) Načrtnite trojuholník s vrcholmi $A = (2, 2)$, $B = (-1, 3)$ a $C = (0, 0)$. Považujúc tento trojuholník za polovicu nejakého rovnobežníka (ktorého?), vysvetlite prečo je jeho obsah

$$\text{obsah}(ABC) = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

b) Predpokladajme, že tretí vrchol tentoraz bude $C = (1, -4)$. Zdôvodnite platnosť vzorca:

$$\text{obsah}(ABC) = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pomôcka: odpočítaním tretieho riadku od prvých dvoch dostaneme:

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ -2 & 7 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}.$$

9. (4.4.9) Vysvetlite, ak chápeme determinant ako objem, prečo $\det 3A = 3^n \det A$ pre maticu A typu $n \times n$.

10. (4.4.13) Nájdite všetky nepárne permutácie množiny $\{1, 2, 3, 4\}$. Takéto permutácie pochádzajú zo zloženia nepárneho počtu riadkových výmen. Potom pre determinant príslušnej matice platí $\det P_\sigma = -1$.

11. (4.4.14) Nech σ je permutácia, ktorá zobrazí $(1, 2, 3, 4, 5)$ na $(5, 4, 1, 2, 3)$.
(a) Kam zobrazí σ^2 päticu $(1, 2, 3, 4, 5)$?
(b) Kam zobrazí σ^{-1} päticu $(1, 2, 3, 4, 5)$?

12. (4.4.16) Ukážte, že ak budeme postupne násobiť maticu A zľava tou istou permutačnou maticou P – t.j. budeme opakovať tú istú výmenu riadkov, niekedy sa prvý riadok opäť objaví na svojom pôvodnom mieste. Skúste tiež ukázať, že pre nejaké m dostaneme po m výmenách pomocou matice P naspäť pôvodnú maticu A, teda $P^m A = A$.

13. (4.R.8,9) a) Ak sú zložky matice A celé čísla a $\det A$ je 1 alebo -1, ukážte, že aj zložky matice A^{-1} budú celočíslené. Nájdite nejaký 2×2 príklad (nediagonálny).
b) Ak sú zložky matíc A aj A^{-1} všetky celočíslené, ukážte, že oba determinanty sú 1 alebo -1. *Pomôcka:* Aký je determinant súčinu AA^{-1}?

14. (4.4.11) Aký je objem rovnobežnostena, ktorého štyri vrcholy sú $(0, 0, 0)$, $(-1, 2, 2)$, $(2, -1, 2)$ a $(2, 2, -1)$? Aké sú ďalšie štyri jeho vrcholy?

15. (4.4.15) Nech matica P_1 zodpovedá nejakej párnej permutácii a P_2 nejakej nepárnej. Odvoďte zo vzťahu $P_1 + P_2 = P_1(P_1^T + P_2^T)P_2$ to, že $\det(P_1 + P_2) = 0$.

16. Na prednáške som hovoril o histórii determinantu. V skutočnosti nešlo o Descarta, ale o Leibniza, ktorý v roku 1683 napísal listom de l'Hôpitalovi niečo takéto:
"Systém rovníc

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{12}x + a_{13}y &= 0 \\ a_{21} + a_{22}x + a_{23}y &= 0 \\ a_{31} + a_{32}x + a_{33}y &= 0 \end{aligned}$$

má riešenie (x, y) vtedy, keď

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} = a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31}."$$

Dokážte toto Leibnizovo tvrdenie, vysvetlite súvis s determinantami a porovnajte s príkladom č. 1.

Príklad od Dr. Djordje Milićevića: Majme maticu A typu 2010×2011 a maticu B typu 2011×2010. Je možné aby platilo $\det AB = 1$ a $\det BA = 2$?