Lineárna algebra – Domáca úloha č. 9

Cvičenia v týždni 21. novembra 2011
Resty z minulých cvičení a zopár na najmenšie štvorce.

---

1. (3.3.6) Nájdite projekciu vektora b do stĺpcového priestoru matice A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Rozložte b na zložku p patriacu do stĺpcového priestoru a zložku r kolmú na tento priestor. Do ktorého zo štyroch základných podpriestorov patrí vektor r?

2. (3.3.9) a) Ak $P = P^T P$, ukážte, že P je projekčnou maticou.
b) Na aký podpriestor zobrazuje projekčná matica $P = 0$?

3. (3.3.10) Ak sú vektory a_1, a_2 (stĺpce matice A) a b vzájomne ortogonálne, čo výjde pri počítaní $A^T A$ a $A^T b$? Aká je projekcia vektora b na rovinu danú vektormi a_1 a a_2?

4. (3.3.11) Predpokladajme, že P je projekčná matica zobrazujúca na podpriestor S a Q je projekčná matica zobrazujúca na jeho ortogonálny doplnok $S^{\perp}$. Čo budú $P + Q$ a PQ? Ukážte, že matica $P - Q$ je sama sebe inverznou.

5. Predpokladajme, že $n \times n$ matica P spĺňa $P^2 = P$. Ukážte, že potom $\mathcal{S}(I - P) \subseteq \mathcal{N}(P)$.
Skúste načrnúť zobrazenie dané maticou P a zdôvodniť prečo by mala platiť rovnosť $\mathcal{S}(I-P) = \mathcal{N}(P)$. (Ako by vyzeral vektor, ktorý by patril do $\mathcal{N}(P)$ a nepatril do $\mathcal{S}(I - P)$?)

6. (3.3.12) Ak V je podpriestor generovaný vektormi $(1, 1, 0, 1)$ a $(0, 0, 1, 0)$ nájdite
a) bázu ortogonálneho doplnku $V^{\perp}$,
b) projekčnú maticu P zobrazujúcu na V,
c) vektor vo V, ktorý je najbližšie k vektoru $b = (0, 1, 0, -1)$ z $V^{\perp}$.

7. (3.3.26) Mladý odborný asistent bol natiahnutý na škripci na dĺžky $L = 175, 180$ a 185 centimetrov pri aplikovaní sily zodpovedajúcej tiaži $F = 1, 2$ a 4 tony. Ak predpokladáme, že platí Hookov zákon $L = a + bF$, nájdite jeho pokojovú dĺžku a metódou najmenších štvorcov.
8. (3.4.2) Nájdite projekcie vektora $b = (0, 3, 0)$ na priamky dané navzájom ortogonálnymi vektormi $a_1 = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$ a $a_2 = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. Nájdite projekciu vektora b na rovinu generovanú a_1 a a_2.

9. Ukážte, že ortogonálna matica, ktorá je zároveň hornou trojuholníkovou musí byť diagonálna.

10. (3.4.4) Nech Q_1 a Q_2 sú ortogonálne matice (t.j. spĺňajú $Q^T Q = I$). Ukážte, že aj súčin $Q_1 Q_2$ je ortogonálna matica. Ak matica Q_1 reprezentuje otočenie (v $\mathbb{R}^2$) o uhol θ a matica Q_2 otočenie o uhol ϕ, čo bude $Q_1 Q_2$? Čo bude $Q_2 Q_1$? Nájdite súčtové vzorce pre $\sin(\theta + \phi)$ a $\cos(\theta + \phi)$ v súčine $Q_1 Q_2$.

11. (3.4.5) Nech u je jednotkový vektor. Ukážte, že $Q = I - 2u^T u$ je ortogonálna matica. Táto matica reprezentuje súmernosť podľa nadroviny $\rho = \{x \,|\, a^T x = 0\}$ a nazýva sa Householderova transformácia. Skúste si nakresliť obrázok, projekciu na priamku danú vektorom u, atď. Vypočítajte Q pre $u^T = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

12. (3.4.6) Nájdite tretí stĺpec matice

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-3}{\sqrt{14}} & \end{bmatrix}$$

tak, aby bola ortogonálna (t.j. $Q^TQ = I$). Musí to byť vektor jednotkovej dĺžky, ortogonálny na zvyšné dva stĺpce – koľko voľnosti vlastne zostáva? Ukážte, že potom budú aj riadky matice Q ortonormálne.

13. (3.4.9) Ak sú vektory q_1, q_2 a q_3 ortonormálne, ktorá lineárna kombinácia q_1 a q_2 je nabližšie ku q_3?