Lineárna algebra a geometria I. – Domáca úloha č. 11

Pre týždeň 5. decembra 2011.

---

1. (3.6.1) Nech S a T sú podpriestory $\mathbb{R}^{13}$ s dimenziami $\dim S = 7$ a $\dim T = 8$.
a) Aká je najväčšia možná dimenzia $S \cap T$?
b) Aká je najmenšia možná dimenzia $S \cap T$?
c) Aká je najmenšia možná dimenzia $S + T$?
d) Aká je najväčšia možná dimenzia $S + T$?

2. (3.6.6) Ak $V \cap W = \{0\}$, potom sa súčet $V + W$ nazýva *priamy súčet* priestorov V a W. Značíme $V \oplus W$. Ak je V generovaný vektormi $(1,1,1)$ a $(1,0,1)$, nájdite W aby $V \oplus W = \mathbb{R}^3$.

3. (3.6.7) Zdôvodnite, prečo sa každý vektor x v priamom súčte $V \oplus W$ dá *jednoznačne* vyjadriť ako $x = v + w$ pre $v \in V$ a $w \in W$.

4. (3.6.8) Priestor V je generovaný vektormi $v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (1,0,1,0)$ a priestor W vektormi $w_1 = (0,1,0,1)$ a $w_2 = (0,0,1,1)$. Nájdite bázu súčtu $V + W$, ako aj bázu a dimenziu prieniku $V \cap W$.

5. (3.6.17) Nájdite faktorizáciu $A = LDL^T$ a potom tzv. *Choleského* faktory $(LD^{1/2})(LD^{1/2})^T$ pre maticu

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 45 \end{bmatrix}.$$

6. (3.R.24, 25) Tomograf (ľudovo "CT-čko") sníma pacienta z rôznych smerov röntgenovými lúčmi a potom vyprodukuje maticu udávajúcu hustotu kostí a tkanív v každom bode. Z matematického hľadiska ide o zistenie zložiek matice z jej projekcií.

Vieme zrekonštruovať 2×2 maticu A, ak poznáme súčty zložiek v každom jej riadku a stĺpci?

Podobne, vieme v 3×3 prípade zrekonštruovať maticu A ak poznáme súčty zložiek v každom riadku, v každom stĺpci ako aj súčty pozdĺž hlavnej diagonály a susedných dvoch diagonál s ňou rovnobežných?

7. (4.2.15) Nájdite determinanty pre nasledujúce matice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad A - \lambda I = \begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix}.$$

Pre akú hodnotu parametra λ je $A - \lambda I$ singulárna?

8. (4.2.1) Ako súvisia hodnoty determinantov $\det(2A)$, $\det(-A)$ a $\det(A^2)$ s hodnotou determinantu $\det(A)$ pre $n \times n$ maticu A?

9. (4.2.4) Ukážte prečo

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 \qquad \text{a} \qquad \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -1.$$

10. (4.2.5) Koľko výmen riadkov potrebujeme, na to aby sme prešli od matice A k matici I:

$$A = \begin{bmatrix} e_n^T \\ e_{n-1}^T \\ \dots \\ e_1^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ & \dots & & \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad I = \begin{bmatrix} e_1^T \\ e_2^T \\ \dots \\ e_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}?$$

Kedy je $\det A = 1$ a kedy $\det A = -1$? (V príklade 4.2.4 sme mali $n = 4$ a $\det A = 1$)

11. (4.2.10) Použitím riadkových operácií overte, že determinant 3×3 Vandermondovej matice je

$$\det \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

Skúste vypočítať aj pre 4×4 matice.

12. (4.2.14) Pre nasledujúce matice nájdite determinanty použitím Gaussovej eliminácie:

$$\begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \\ t & 1 & t & t^2 \\ t^2 & t & 1 & t \\ t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix}.$$