Lineárna algebra – Domáca úloha č. 12

Pre týždeň 12. decembra 2011.

---

1. (4.2.11) a) Antisymetrická matica spĺňa $K^T = -K$, napríklad

$$K \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}.$$

Vysvetlite prečo v 3×3 prípade platí $\det(-K) = (-1)^3 \det K$. Zároveň $\det K^T = \det K$ (toto platí vždy). Z toho vyvoďte, že taká matica má nulový determinant.
b) Nájdite antisymetrickú 4×4 maticu s nenulovým determinantom.

2. (4.2.13) Ak v matici A je súčet zložiek v každom riadku nula, ukážte, že $\det A = 0$. Ak je súčet zložiek v každom riadku 1, ukážte, že $\det(A-I) = 0$. Nájdite takú maticu A, pre ktorú z toho nevyplýva, že $\det A = 1$.

3. (4.2.17) Predpokladajme, že $CD = -DC$. Nájdite chybu v nasledujúcom dôvodení: Zoberúc determinanty, dostávame $(\det C)(\det D) = -(\det D)(\det C)$, čiže aspoň jedna z matíc C alebo D musí mať nulový determinant. Preto rovnosť $CD = -DC$ môže nastať iba ak C alebo D je singulárna.

4. (4.3.1) Pre maticu

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

nájdite (jedinú) permutáciu, ktorá bude zodpovedať nenulovému členu vo vzorci pre výpočet determinantu. Rozhodnite, či táto permutácia je párna alebo nepárna a vypočítajte $\det A$.

5. (4.3.3) *Pravda / Nepravda:* (1) Determinant súčinu $S^{-1}AS$ sa rovná determinantu matice A.
(2) Ak $\det A = 0$, potom aspoň jeden člen v rozvoji na $(n-1) \times (n-1)$ kofaktory musí byť nula.
(3) Matica, ktorej zložky sú iba nuly a jednotky má determinant 1, 0 alebo -1.

6. (4.3.5) Nech D_n je determinant $(1, 1, -1)$-tridiagonálnej matice typu $n \times n$:

$$D_n = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ 1 & 1 & -1 & & \\ & 1 & 1 & -1 & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Overte, že rozvojom podľa prvého riadku dostaneme $D_n = D_{n-1} + D_{n-2}$, čo je predpis pre *Fibonacciho postupnosť* $1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

7. (4.3.8) Vysvetlite, prečo bude mať 5×5 matica s nulovou 3×3 podmaticou nulový determinant bez ohľadu na to, aké hodnoty budú na miestach označených $*$:

$$\text{determinant matice } A = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{bmatrix} \text{ je vždy nulový.}$$

8. (4.3.10) Vypočítajte determninant matice

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

buď elimináciou alebo rozvojom podľa riadku. Nájdite tiež determinanty menších matíc A_3 a A_2 – s nulami na diagonále a jednotkami na ostatných miestach. Vedeli by ste predpovedať hodnotu $\det A_n$?

9. (4.R.16) Nájdite $\det A$ ak $a_{ij} = i + j$.

10. (4.4.9) Vysvetlite, ak chápeme determinant ako objem, prečo $\det 3A = 3^n \det A$ pre maticu A typu $n \times n$.

11. (4.R.23) Ak $C = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ a $D = \left[\begin{smallmatrix} u & v \\ w & z \end{smallmatrix}\right]$, potom rovnicu $CD = -DC$ môžeme prepísať ako

$$CD + DC = 0 \qquad \text{alebo} \qquad \begin{bmatrix} 2a & c & b & 0 \\ b & a+d & 0 & b \\ c & 0 & a+d & c \\ 0 & c & b & 2d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Nájdite determinant tejto 4×4 matice A.
(b) Ukážte, že $\det A = 0$ ak $a + d = 0$ alebo $ad - bc = 0$.
Vo všetkých ostatných prípadoch môže nastať $CD = -DC$ iba pre $D = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$.

12. (4.3.9) Ukážte, že pre pre všeobecné matice typu 4×4 rozdelené na podbloky veľkosti 2×2 platí

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} = \det A \det D, \qquad \text{ale} \qquad \det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \neq \det A \det D - \det B \det C.$$

13. (4.3.13) Ak matica A je typu $m \times n$ a B je typu $n \times m$, ukážte, že

$$\det \begin{bmatrix} 0 & A \\ -B & I \end{bmatrix} = \det AB. \qquad \left(\textit{Pomôcka:} \text{ vynásobte sprava maticou det} \begin{bmatrix} I & 0 \\ B & I \end{bmatrix} \right)$$

Overte túto rovnosť na nejakom príklade s $m < n$ a inom s $m > n$. Prečo v druhom prípade vždy dostaneme $\det AB = 0$?