

Lineárna algebra – Domáca úloha č. 13

Na precvičenie učiva z posledného týždňa semestra, pred skúškou.

1. (4.3.12) Zistite aké znamienko prislúcha v determinante 5×5 matice súčinu $a_{15}a_{24}a_{33}a_{42}a_{51}$. Inými slovami, je permutácia $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ párna alebo nepárna?

2. (4.4.1) Nájdite determinant a všetkých deväť členov A_{ij} pre maticu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Overte, že A krát A_{adj} je $(\det A)$ -násobok jednotkovej matice. Nájdite A^{-1} .

3. (4.4.6) a) Nájdite determinant matice M , ktorá vznikne z jednotkovej matice nahradením j -teho stĺpca vektorom x :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & & x_1 & & \\ & 1 & \cdot & & \\ & & x_j & & \\ & & \cdot & 1 & \\ & & x_n & & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Ak $Ax = b$, ukážte, že matica AM je rovná matici B_j z Cramerovho pravidla (B_j vznikne z matice A nahradením j -teho stĺpca pravou stranou b).

c) Odvoďte Cramerovo pravidlo zobrazením determinantov v rovnosti $AM = B_j$.

4. (4.4.8) a) Načrtnite trojuholník s vrcholmi $A = (2, 2)$, $B = (-1, 3)$ a $C = (0, 0)$. Považujúc tento trojuholník za polovicu nejakého rovnobežníka (ktorého?), vysvetlite prečo je jeho obsah

$$\text{obsah}(ABC) = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

b) Predpokladajme, že tretí vrchol tentoraz bude $C = (1, -4)$. Zdôvodnite platnosť vzorca:

$$\text{obsah}(ABC) = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pomôcka: odpočítaním tretieho riadku od prvých dvoch dostaneme:

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ -2 & 7 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}.$$

5. (4.4.13) Nájdite všetky nepárne permutácie množiny $\{1, 2, 3, 4\}$. Takéto permutácie pochádzajú zo zloženia nepárneho počtu riadkových výmen. Potom pre determinant príslušnej matice platí $\det P_\sigma = -1$.

6. (4.4.14) Nech σ je permutácia, ktorá zobrazí $(1, 2, 3, 4, 5)$ na $(5, 4, 1, 2, 3)$.

(a) Kam zobrazí σ^2 päťicu $(1, 2, 3, 4, 5)$?

(b) Kam zobrazí σ^{-1} päťicu $(1, 2, 3, 4, 5)$?

7. (4.4.16) Ukážte, že ak budeme postupne násobiť maticu A zľava tou istou permutačnou maticou P – t.j. budeme opakovať tú istú výmenu riadkov, niekedy sa prvý riadok opäť objaví na svojom pôvodnom mieste. Skúste tiež ukázať, že pre nejaké m dostaneme po m výmenách pomocou matice P naspäť pôvodnú maticu A , teda $P^m A = A$.

8. (4.R.8,9) a) Ak sú zložky matice A celé čísla a $\det A$ je 1 alebo -1 , ukážte, že aj zložky matice A^{-1} budú celočíselné. Nájdite nejaký 2×2 príklad (nediagonálny).

b) Ak sú zložky matíc A aj A^{-1} všetky celočíselné, ukážte, že oba determinanty sú 1 alebo -1 .
Pomôcka: Aký je determinant súčinu AA^{-1} ?

9. (4.4.11) Aký je objem rovnobežnostena, ktorého štyri vrcholy sú $(0, 0, 0)$, $(-1, 2, 2)$, $(2, -1, 2)$ a $(2, 2, -1)$? Aké sú ďalšie štyri jeho vrcholy?

10. (4.4.15) Nech matica P_1 zodpovedá nejakej párnej permutácii a P_2 nejakej nepárnej. Odvodte zo vzťahu $P_1 + P_2 = P_1(P_1^T + P_2^T)P_2$ to, že $\det(P_1 + P_2) = 0$.

11. (4.R.19) Vysvetlite prečo bude bod (x, y) ležať na priamke prechádzajúcej cez body $(2, 8)$ a $(4, 7)$ vtedy, ak

$$\det \begin{bmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 8 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix} = 0, \quad \text{alebo} \quad x + 2y - 18 = 0.$$

12. Determinanty majú pomerne dávnu históriu. Asi prvou zmienkou je list od Leibniza, ktorý v roku 1683 napísal de l'Hôpitalovi niečo takéto:

”Systém rovníc

$$a_{11} + a_{12}x + a_{13}y = 0$$

$$a_{21} + a_{22}x + a_{23}y = 0$$

$$a_{31} + a_{32}x + a_{33}y = 0$$

má riešenie (x, y) vtedy, keď

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} = a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31}.”$$

Dokážte toto Leibnizovo tvrdenie, vysvetlite súvis s determinantami a porovnajte s príkladom č. 4.

Príklad od Dr. Djordje Miličevića: Majme maticu A typu 2011×2012 a maticu B typu 2012×2011 . Je možné aby platilo $\det AB = 1$ a $\det BA = 2$?