

Lineárna algebra – Domáca úloha č. 6

Pre týždeň 29. októbra 2012, na precvičenie pred skúškou

1. (2.4.8) Prečo nemôže existovať matica, ktorej nulový aj riadkový priestor by obsahovali vektor $[1, 1, 1, 1]^T$?

2. (2.4.12) Nech $Ax = 0$ má netriviálne riešenie. Ukážte, že $A^T y = f$ nebude mať riešenie pre nejaké f . Nájdite príklad takého A a f .

3. (2.4.17) (*Paradox*) Majme pravú inverznú maticu k A , teda $AB = I$. Po prenasobení maticou A^T dostaneme $A^T AB = A^T$, z čoho $B = (A^T A)^{-1} A^T$. Ale potom $BA = I$, t.j. B by mala byť aj *ľavá* inverzná matica k A . Ktorý krok v tomto “dôkaze” je nekorektný?

4. (2.R.3) Pravda/Nepravda (nájdite zdôvodnenie, resp. protipríklad):

a) Ak vektory x_1, x_2, \dots, x_m generujú priestor S , potom $\dim S = m$.

b) Prienik dvoch podpriestorov vektorového priestoru X nemôže byť prázdny.

c) Ak $Ax = Ay$, potom $x = y$.

d) Ak má štvorcová matica A lineárne nezávislé stĺpce, potom ich má aj matica A^2 .

5. (2.R.9) Vo vektorovom priestore matíc typu 2×2 ,

a) budú tvoriť matice s hodnotou 1 vektorový podpriestor?

b) bude podpriestor generovaný permutačnými maticami vyzeráť ako?

c) bude podpriestor generovaný kladnými maticami (t.j. všetky $a_{ij} > 0$) vyzeráť ako?

d) bude podpriestor generovaný invertibilnými maticami vyzeráť ako?

6. (2.R.17) Ak pre vektor $x \in \mathbb{R}^n$ platí $x^T y = 0$ pre každé $y \in \mathbb{R}^n$, ukážte, že $x = 0$.

7. (2.R.18) Ak A je $n \times n$ matica spĺňajúca $A^2 = A$ a A má hodnotu n , potom ukážte, že $A = I$.

8. (2.R.20) Koľko 5×5 permutačných matíc existuje? Sú lineárne nezávislé v $M_{5,5}$? Generujú celý priestor $M_{5,5}$ matíc typu 5×5 ? (Netreba ich vypisovať všetky)

9. (2.R.22) a) Akú podmienku musí spĺňať pravá strana b , aby mal systém $Ax = b$ riešenie, ak

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} ?$$

b) Nájdite bázu nulového priestoru matice A .

c) Nájdite všeobecné riešenie systému $Ax = b$, ak riešenie existuje.

d) Nájdite bázu stĺpcového priestoru matice A .

e) Aká je hodnota matice A^T ?

10. Uvažujme vektorový priestor \mathcal{P}_6 reálnych polynómov stupňa najvyššieho 6 v premennej x . Ukážte, že $\mathcal{P}_6(0)$ – množina polynómov, pre ktoré je 0 koreňom, bude podpriestorom \mathcal{P}_6 . Nájdite dimenziu a bázu $\mathcal{P}_6(0)$.

Podobne uvažujme polynómy s koreňom 1: $\mathcal{P}_6(1) = \{p(x) \mid p(1) = 0, p(x) \in \mathcal{P}_6\}$. Nájdite dimenziu a bázu $\mathcal{P}_6(1)$. Čo bude prienik $\mathcal{P}_6(0) \cap \mathcal{P}_6(1)$, akú bude mať dimenziu?

11. (2.6.3) Rozhodnite, či zloženie piatich osových symetrií a ôsmimich rotácií roviny dá rotáciu alebo osovú symetriu. Záleží na poradí v ktorom tieto transformácie robíme?

12. (2.6.7) Nájdite matice typu 3×3 reprezentujúce transformácie v \mathbb{R}^3 , ktoré

i) sprojektujú každý vektor do roviny xy ,

ii) zobrazia každý vektor symetricky podľa roviny xy ,

iii) otočia rovinu xy o uhol γ , nechajúc os z namieste,

- iv) otočia rovinu xy , potom rovinu xz a nakoniec rovinu yz , vždy o 90° ,
v) spraví tie isté rotácie ako v iv) len vždy o 180° .

13. (2.6.16) Priestor všetkých matic typu 2×2 má štyri bázové “vektory”

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ukážte, že operácia *transpozície* je lineárnou transformáciou na tomto priestore a nájdite príslušnú maticu A v tejto báze. Prečo platí $A^2 = I$?