

1. (3.4.13) Použite Gram-Schmidtov proces na vektory

$$a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a vyjadrite výsledok v tvare  $A = QR$ .

2. (3.4.27) Nájdite ortonormálnu bázu pre podpriestor generovaný vektormi  $a_1 = (1, -1, 0, 0)$ ,  $a_2 = (0, 1, -1, 0)$  a  $a_3 = (0, 0, 1, -1)$ .

3. Nájdite príklad podpriestorov  $V$  a  $W$  v  $\mathbb{R}^3$  tak, aby  $V \cap W$  obsahovalo iba nulový vektor ale  $V$  nebol ortogonálny na  $W$ .

4. (3.R.19) Ukážte, že ak vektory  $v_1, \dots, v_n$  tvoria ortonormálnu bázu  $\mathbb{R}^n$ , potom  $v_1 v_1^T + \dots + v_n v_n^T = I$ .

5. (3.R.20) *Pravda/Nepravda*: Ak vektory  $x$  a  $y$  sú ortogonálne a  $P$  je projekcia, potom  $Px$  a  $Py$  sú ortogonálne. Zdôvodnite.

6. (3.R.31) Ukážte, že vzdialenosť nadroviny  $a^T x - c = 0$  od počiatku v  $\mathbb{R}^m$  je  $|c|/\|a\|$ . Ako ďaleko je nadrovina  $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 8$  od počiatku a ktorý jej bod je k nemu najbližšie?

7. Majme vektory  $a_1 = (1, 1, 1)$  a  $a_2 = (1, -1, 1)$ . Maticu projekcie na vektor  $a_1$  označme  $P_1$  a maticu projekcie na vektor  $a_2$  označme  $P_2$ . T.j.  $P_i = \frac{a_i a_i^T}{a_i^T a_i}$ . Nájdite maticu projekcie  $P$  na rovinu generovanú vektormi  $a_1, a_2$  a presvedčte sa, že  $P \neq P_1 + P_2$ . Akú podmienku by museli spĺňať vektory  $a_1, a_2$  aby takáto rovnosť platila?

8. (3.4.18) Ak  $A = QR$  nájdite jednoduchý vzorec pre projekčnú maticu  $P$  zobrazujúcu do stĺpcového priestoru  $A$ .

9. (3.4.24) Nájdite nasledujúce Legendrove polynómy – t.j. polynómy stupňa 3 a 4 ortogonálne na 1,  $x$  a  $x^2 - \frac{1}{3}$  na intervale  $\langle -1, 1 \rangle$ .

10. (3.R.39) Ako vyzerá matica  $A^T A$  ak sú stĺpce matice  $A$  ortogonálne? Ako keď sú ortonormálne?

11. (3.6.1) Nech  $S$  a  $T$  sú podpriestory  $\mathbb{R}^{13}$  s dimenziami  $\dim S = 7$  a  $\dim T = 8$ .

- Aká je najväčšia možná dimenzia  $S \cap T$ ?
- Aká je najmenšia možná dimenzia  $S \cap T$ ?
- Aká je najmenšia možná dimenzia  $S + T$ ?
- Aká je najväčšia možná dimenzia  $S + T$ ?

12. (3.6.6) Ak  $V \cap W = \{0\}$ , potom sa súčet  $V + W$  nazýva *priamy súčet* priestorov  $V$  a  $W$ . Značíme  $V \oplus W$ . Ak je  $V$  generovaný vektormi  $(1, 1, 1)$  a  $(1, 0, 1)$ , nájdite  $W$  aby  $V \oplus W = \mathbb{R}^3$ .

13. (3.6.7) Zdôvodnite, prečo sa každý vektor  $x$  v priamom súčte  $V \oplus W$  dá *jednoznačne* vyjadriť ako  $x = v + w$  pre  $v \in V$  a  $w \in W$ .

14. (3.6.8) Priestor  $V$  je generovaný vektormi  $v_1 = (1, 1, 0, 0)$ ,  $v_2 = (1, 0, 1, 0)$  a priestor  $W$  vektormi  $w_1 = (0, 1, 0, 1)$  a  $w_2 = (0, 0, 1, 1)$ . Nájdite bázu súčtu  $V + W$ , ako aj bázu a dimenziu prieniku  $V \cap W$ .