Lineárna algebra a geometria I. – Domáca úloha č. 11

Pre týždeň 3. decembra 2012.

---

1. (3.6.17) Nájdite faktorizáciu $A = LDL^T$ a potom tzv. *Choleského* faktory $(LD^{1/2})(LD^{1/2})^T$ pre maticu

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 45 \end{bmatrix}.$$

2. (3.R.24, 25) Tomograf (ľudovo "CT-čko") sníma pacienta z rôznych smerov röntgenovými lúčmi a potom vyprodukuje maticu udávajúcu hustotu kostí a tkanív v každom bode. Z matematického hľadiska ide o zistenie zložiek matice z jej projekcií.

Vieme zrekonštruovať 2×2 maticu A, ak poznáme súčty zložiek v každom jej riadku a stĺpci?

Podobne, vieme v 3×3 prípade zrekonštruovať maticu A ak poznáme súčty zložiek v každom riadku, v každom stĺpci ako aj súčty pozdĺž hlavnej diagonály a susedných dvoch diagonál s ňou rovnobežných?

3. (4.2.15) Nájdite determinanty pre nasledujúce matice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad A - \lambda I = \begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix}.$$

Pre akú hodnotu parametra λ je $A - \lambda I$ singulárna?

4. (4.2.1) Ako súvisia hodnoty determinantov $\det(2A)$, $\det(-A)$ a $\det(A^2)$ s hodnotou determinantu $\det(A)$ pre $n \times n$ maticu A?

5. (4.2.4) Ukážte prečo

$$\det\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 \quad \text{a} \quad \det\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -1.$$

6. (4.2.5) Koľko výmen riadkov potrebujeme, na to aby sme prešli od matice A k matici I:

$$A = \begin{bmatrix} e_n^T \\ e_{n-1}^T \\ \dots \\ e_1^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ & \dots & & \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad I = \begin{bmatrix} e_1^T \\ e_2^T \\ \dots \\ e_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}?$$

Kedy je $\det A = 1$ a kedy $\det A = -1$? (V príklade 4.2.4 sme mali $n = 4$ a $\det A = 1$)

7. (4.2.10) Použitím riadkových operácií overte, že determinant 3×3 Vandermondovej matice je

$$\det\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

Skúste vypočítať aj pre 4×4 matice.

8. (4.2.14) Pre nasledujúce matice nájdite determinanty použitím Gaussovej eliminácie:

$$\begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \\ t & 1 & t & t^2 \\ t^2 & t & 1 & t \\ t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix}.$$

9. (4.2.11) a) Antisymetrická matica spĺňa $K^T = -K$, napríklad

$$K \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}.$$

Vysvetlite prečo v 3×3 prípade platí $\det(-K) = (-1)^3 \det K$. Zároveň $\det K^T = \det K$ (toto platí vždy). Z toho vyvoďte, že taká matica má nulový determinant.
b) Nájdite antisymetrickú 4×4 maticu s nenulovým determinantom.

10. (4.2.13) Ak v matici A je súčet zložiek v každom riadku nula, ukážte, že $\det A = 0$. Ak je súčet zložiek v každom riadku 1, ukážte, že $\det(A - I) = 0$. Nájdite takú maticu A, pre ktorú z toho nevyplýva, že $\det A = 1$.

11. (4.2.17) Predpokladajme, že $CD = -DC$. Nájdite chybu v nasledujúcom dôvodení: Zoberúc determinanty, dostávame $(\det C)(\det D) = -(\det D)(\det C)$, čiže aspoň jedna z matíc C alebo D musí mať nulový determinant. Preto rovnosť $CD = -DC$ môže nastať iba ak C alebo D je singulárna.