Lineárna algebra – Domáca úloha č. 13

Na precvičenie učiva z posledného týždňa semestra, pred skúškou.

---

1. (4.4.8) a) Načrtnite trojuholník s vrcholmi $A = (2,2)$, $B = (-1,3)$ a $C = (0,0)$. Považujúc tento trojuholník za polovicu nejakého rovnobežníka (ktorého?), vysvetlite prečo je jeho obsah

$$\text{obsah}(ABC) = \frac{1}{2}\det\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

b) Predpokladajme, že tretí vrchol tentoraz bude $C = (1,-4)$. Zdôvodnite platnosť vzorca:

$$\text{obsah}(ABC) = \frac{1}{2}\det\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\det\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pomôcka: odpočítaním tretieho riadku od prvých dvoch dostaneme:

$$\det\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ -2 & 7 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}.$$

2. (4.4.13) Nájdite všetky nepárne permutácie množiny $\{1,2,3,4\}$. Takéto permutácie pochádzajú zo zloženia nepárneho počtu riadkových výmen. Potom pre determinant príslušnej matice platí $\det P_\sigma = -1$.

3. (4.4.14) Nech σ je permutácia, ktorá zobrazí $(1,2,3,4,5)$ na $(5,4,1,2,3)$.
(a) Kam zobrazí σ^2 päticu $(1,2,3,4,5)$?
(b) Kam zobrazí σ^{-1} päticu $(1,2,3,4,5)$?

4. (4.4.16) Ukážte, že ak budeme postupne násobiť maticu A zľava tou istou permutačnou maticou P – t.j. budeme opakovať tú istú výmenu riadkov, niekedy sa prvý riadok opäť objaví na svojom pôvodnom mieste. Skúste tiež ukázať, že pre nejaké m dostaneme po m výmenách pomocou matice P naspäť pôvodnú maticu A, teda $P^m A = A$.

5. (4.R.8,9) a) Ak sú zložky matice A celé čísla a $\det A$ je 1 alebo -1, ukážte, že aj zložky matice A^{-1} budú celočíslené. Nájdite nejaký 2×2 príklad (nediagonálny).
b) Ak sú zložky matíc A aj A^{-1} všetky celočíslené, ukážte, že oba determinanty sú 1 alebo -1. *Pomôcka:* Aký je determinant súčinu AA^{-1}?

6. (4.4.11) Aký je objem rovnobežnostena, ktorého štyri vrcholy sú $(0,0,0)$, $(-1,2,2)$, $(2,-1,2)$ a $(2,2,-1)$? Aké sú ďalšie štyri jeho vrcholy?

7. (4.4.15) Nech matica P_1 zodpovedá nejakej párnej permutácii a P_2 nejakej nepárnej. Odvoďte zo vzťahu $P_1 + P_2 = P_1(P_1^T + P_2^T)P_2$ to, že $\det(P_1 + P_2) = 0$.

8. (4.R.19) Vysvetlite prečo bude bod (x,y) ležať na priamke prechádzajúcej cez body $(2,8)$ a $(4,7)$ vtedy, ak

$$\det\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 8 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix} = 0, \qquad \text{alebo} \qquad x + 2y - 18 = 0.$$

9. Determinanty majú pomerne dávnu históriu. Asi prvou zmienkou je list od Leibniza, ktorý v roku 1683 napísal de l'Hôpitalovi niečo takéto:
"Systém rovníc

$$a_{11} + a_{12}x + a_{13}y = 0$$
$$a_{21} + a_{22}x + a_{23}y = 0$$
$$a_{31} + a_{32}x + a_{33}y = 0$$

má riešenie (x, y) vtedy, keď

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} = a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31}."$$

Dokážte toto Leibnizovo tvrdenie, vysvetlite súvis s determinantami a porovnajte s príkladmi č. 1 a č. 8.

Príklad od Dr. Djordje Milićevića: Majme maticu A typu 2012×2013 a maticu B typu 2013×2012. Je možné aby platilo $\det AB = 1$ a $\det BA = 2$?