Lineárna algebra – Domáca úloha č. 6

Pre týždeň 11. novembra 2013, na precvičenie pred písomkou

---

1. (2.R.9) Vo vektorovom priestore matíc typu 2×2,
a) budú tvoriť matice s hodnosťou 1 vektorový podpriestor?
b) bude podpriestor generovaný permutačnými maticami vyzerať ako?
c) bude podpriestor generovaný kladnými maticami (t.j. všetky $a_{ij} > 0$) vyzerať ako?
d) bude podpriestor generovaný invertibilnými maticami vyzerať ako?

2. (2.R.17) Ak pre vektor $x \in \mathbb{R}^n$ platí $x^T y = 0$ pre každé $y \in \mathbb{R}^n$, ukážte, že $x = 0$.

3. (2.R.18) Ak A je $n \times n$ matica spĺňajúca $A^2 = A$ a A má hodnosť n, potom ukážte, že $A = I$.

4. (2.R.20) Koľko 5×5 permutačných matíc existuje? Sú lineárne nezávislé v $M_{5,5}$? Generujú celý priestor $M_{5,5}$ matíc typu 5×5? (Netreba ich vypisovať všetky)

5. (2.R.22) a) Akú podmienku musí spĺňať pravá strana b, aby mal systém $Ax = b$ riešenie, ak

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{a} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}?$$

b) Nájdite bázu nulového priestoru matice A.
c) Nájdite všeobecné riešenie systému $Ax = b$, ak riešenie existuje.
d) Nájdite bázu stĺpcového priestoru matice A.
e) Aká je hodnosť matice A^T?

6. Uvažujme vektorový priestor $\mathcal{P}_6$ reálnych polynómov stupňa nanajvýš 6 v premennej x. Ukážte, že $\mathcal{P}_6(0)$ – množina polynómov, pre ktoré je 0 koreňom, bude podpriestorom $\mathcal{P}_6$. Nájdite dimenziu a bázu $\mathcal{P}_6(0)$.

Podobne uvažujme polynómy s koreňom 1: $\mathcal{P}_6(1) = \{\, p(x) \,|\, p(1) = 0, p(x) \in \mathcal{P}_6\}$. Nájdite dimenziu a bázu $\mathcal{P}_6(1)$. Čo bude prienik $\mathcal{P}_6(0) \cap \mathcal{P}_6(1)$, akú bude mať dimenziu?

7. (2.6.3) Rozhodnite, či zloženie piatich osových symetrií a ôsmimich rotácí roviny dá rotáciu alebo osovú symetriu. Záleží na poradí v ktorom tieto transforácie robíme?

8. (2.6.7) Nájdite matice typu 3×3 reprezentujúce transformácie v $\mathbb{R}^3$, ktoré
i) sprojektujú každý vektor do roviny xy,
ii) zobrazia každy vektor symetricky podľa roviny xy,
iii) otočia rovinu xy o uhol γ, nechajúc os z namieste,
iv) otočia rovinu xy, potom rovinu xz a nakoniec rovinu yz, vždy o $90°$,
v) spravia tie isté rotácie ako v iv) len vždy o $180°$.

9. (2.6.16) Priestor všetkých matíc typu 2×2 má štyri bázové "vektory"

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ukážte, že operácia *transpozície* je lineárnou transformáciou na tomto priestore a nájdite príslušnú maticu A v tejto báze. Prečo platí $A^2 = I$?

10. (2.6.5) Priamku prechádzajúcu cez koncové body vektorov u a v môžeme reprezentovať ako koncové body množiny vektorov $P = \{tu + (1-t)v \,|\, t \in \mathbb{R}\}$. Ukážte, že každá lineárna tansformácia α zobrazuje priamku na priamku. Tiež ukážte, že stred úsečky tvorenej koncovými bodmi vektorov x a y sa zobrazí na stred úsečky z $\alpha(x)$ do $\alpha(y)$.

11. (2.6.9) Nájdite maticu lineárnej transformácie (je to naozaj lineárna transformácia?) z priestoru polynómov $P_3(t)$ do priestoru $P_4(t)$, ktorá každému polynómu priradí jeho $(2+3t)$-násobok.

12. (2.6.13) Predpokladajme, že α je lineárna transformácia roviny xy reprezentovaná maticou M. Ukážte, že ak existuje zobrazenie α^{-1}, potom je aj ono lineárnou transformáciou. Vysvetlite prečo matica M^{-1} reprezentuje α^{-1}.

13. (2.6.21) Lineárna transformácia posielajúca vektor tvaru (x_1, x_2, x_3) do (x_2, x_3, x_1) je rotácia. Nájdite jej os a uhol.

14. (2.R.10) Vymyslite vektorový priestor, ktorý obsahuje všetky lineárne transformácie z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$. Musíte definovať sčítanie lineárnych transformácií, ako aj násobenie skalárom. Aká bude dimenzia takéhoto priestoru?

15. (2.R.23) Ako by sa dala skonšturovať matica, ktorá zobrazí vektory štandardnej bázy e_1, e_2, e_3 na dané vektory v_1, v_2, v_3? Kedy bude takáto matica invertibilná?