Lineárna algebra – Domáca úloha č. 7

Cvičenia v týždni 18. novembra 2013

---

1. (3.1.6) V $\mathbb{R}^3$ nájdite všetky vektory, ktoré sú kolmé na vektory $(1,1,1)$ a $(1,-1,0)$. Vytvorte z týchto vektorov bázu $\mathbb{R}^3$, v ktorej budú všetky vektory navzájom ortogonálne a budú mať jednotkovú dĺžku (tvoria tzv. *ortonormálnu* bázu).

2. (3.1.8) Nech V a W sú ortogonálne podpriestory. Ukážte, že iba nulový vektor patrí do oboch z nich, t.j. $V \cap W = \{0\}$.

3. (3.1.11) Tvrdenie o riešiteľnosti systémov lineárnych rovníc sa dá formulovať pomocou tzv. *Fredholmovej alternatívy*: pre každé A a b má práve jeden zo systémov riešenie

$$\text{(i)} \quad Ax = b \qquad\qquad \text{(ii)} \quad A^T y = 0, \quad y^T b \neq 0.$$

Inými slovami, buď b patrí do stĺpcového priestoru $\mathcal{S}(A)$ alebo existuje y v $\mathcal{N}(A^T)$ také, že $y^T b \neq 0$. Ukážte, že rovnice (i) a (ii) nemôžu mať riešenie zároveň.

4. (3.1.14) Ukážte, že $x - y$ je kolmé na $x + y$ práve vtedy, keď $\|x\| = \|y\|$.

5. (3.1.19) Pravda/Nepravda. Zdôvodnite.
a) ak V je ortogonálne k W, potom aj $V^\perp$ je ortogonálne k $W^\perp$,
b) Ak V je ortogonálne k W a W je ortogonálne k Z, potom aj V je ortogonálne k Z.

6. (3.1.22) Nech S je podpriestor $\mathbb{R}^4$ tvorený vektormi spĺňajúcimi $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Nájdite bázu priestoru $S^\perp$, t.j. priestoru vektorov kolmých na S.

7. (2.6.19) Vo vektorovom priestore $P_3(t)$ polynómov stupňa 3, t.j. $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$, majme podmnožinu S polynómov spĺňajúcich $\int_0^1 p(t)dt = 0 \in \mathbb{R}$. Overte, že S je podpriestor a nájdite jeho bázu.
Pozn. Použite vzorec $\int_0^1 t^k dt = \frac{1}{k+1}$. Všimnite si, že zobrazenie $p(t) \mapsto \int_0^1 p(t)dt$ je lineárna transformácia z $P_3(t)$ do $\mathbb{R}$ a množina S jej jadro.

8. (3.1.17) Nech V je ortogonálny doplnok podpriestoru W v $\mathbb{R}^n$. Existuje matica, ktorej riadkový priestor je V a nulový priestor je W? Vychádzajúc z bázy priestoru V, ukážte ako by sa skonštruovala taká matica.

9. (3.1.20) Nech S je podpriestor $\mathbb{R}^n$. Vysvetlite, čo znamená rovnosť $(S^\perp)^\perp = S$ a prečo platí.

10. (3.2.3) Aký násobok vektora $a = (1,1,1)$ je najbližšie k bodu $b = (2,4,4)$? Nájdite tiež najbližší bod k bodu a na priamke prechádzajúcej cez b.

11. (3.2.5) Aký uhol zviera vektor $(1,1,\ldots,1)$ v $\mathbb{R}^n$ so súradnicovými osami? Ako vyzerá projekcia na priamku danú týmto vektorom?

12. (3.2.8) Molekula metánu CH_4 vyzerá tak, že atóm uhlíka je v strede pravidelného štvorstena a štyri atómy vodíka sú v jeho vrcholoch. Ak si za vrcholy vyberieme body $(0,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,0,1)$ a $(0,1,1)$, potom dĺžky všetkých hrán medzi nimi budú $\sqrt{2}$, teda naozaj ide o pravidelný štvorsten. Aký je kosínus uhla medzi úsečkami spájajúcimi stred $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ s vrcholmi? Aká je veľkosť tohto uhla?

13. (3.2.11) a) Nájdite projekčnú maticu P_1 zobrazujúcu rovinu $\mathbb{R}^2$ na priamku danú vektorom $a = \left[\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}\right]$ a maticu P_2 zobrazujúcu rovinu na priamku s ňou kolmú.
b) Vypočítajte $P_1 + P_2$ a $P_1 P_2$. Vysvetlite.

14. (3.2.13) Ukážte, že *stopa* matice $P = aa^T/a^T a$ – t.j. súčet zložiek na jej diagonále – sa vždy rovná 1.

15. (3.2.16) Predpokladajme, že P je projekčná matica na priamku prechádzajúcu cez a.
a) prečo je skalárny súčin vektorov x a Py rovnaký ako skalárny súčin vektorov Px a y?
b) sú aj uhly medzi nimi rovnaké? Porovnajte ich kosínusy pre $a = (1, 1, -1)$, $x = (2, 0, 1)$ a $y = (2, 1, 2)$.
c) Prečo je skalárny súčin vektorov Px a Py opäť rovnaký? Aký je uhol medzi týmito dvoma vektormi?