

1. (3.3.4) Pre nasledujúce  $A$ ,  $x$  a  $b$  rozpište chybový člen  $E^2 = \|Ax - b\|^2$  ako kvadratickú funkciu dvoch premenných  $u$  a  $v$ .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Nájdite rovnicu, vyjadrujúcu fakt, že derivácia  $E^2$  vzhľadom na  $u$  (resp.  $v$ ) je nulová. Porovnajte tieto rovnice s  $A^T A \bar{x} = A^T b$  a presvedčte sa, že analýza dáva tie isté normálové rovnosti ako geometria. Nájdite riešenie  $\bar{x}$  a projekciu  $p = A\bar{x}$ . Prečo platí  $p = b$ ?

2. (3.3.6) Nájdite projekciu vektora  $b$  do stĺpcového priestoru matice  $A$ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Rozložte  $b$  na zložku  $p$  patriacu do stĺpcového priestoru a zložku  $r$  kolmú na tento priestor. Do ktorého zo štyroch základných podpriestorov patrí vektor  $r$ ?

3. (3.3.9) a) Ak  $P = P^T P$ , ukážte, že  $P$  je projekčnou maticou.  
b) Na aký podpriestor zobrazuje projekčná matica  $P = 0$ ?

4. (3.3.10) Ak sú vektory  $a_1$ ,  $a_2$  (stĺpce matice  $A$ ) a  $b$  vzájomne ortogonálne, čo výjde pri počítaní  $A^T A$  a  $A^T b$ ? Aká je projekcia vektora  $b$  na rovinu danú vektormi  $a_1$  a  $a_2$ ?

5. (3.3.11) Predpokladajme, že  $P$  je projekčná matica zobrazujúca na podpriestor  $S$  a  $Q$  je projekčná matica zobrazujúca na jeho ortogonálny doplnok  $S^\perp$ . Čo budú  $P + Q$  a  $PQ$ ? Ukážte, že matica  $P - Q$  je sama sebe inverznou.

6. Predpokladajme, že  $n \times n$  matica  $P$  spĺňa  $P^2 = P$ . Ukážte, že potom  $\mathcal{S}(I - P) \subseteq \mathcal{N}(P)$ .

Skúste načrtnúť zobrazenie dané maticou  $P$  a zdôvodniť prečo by mala platiť rovnosť  $\mathcal{S}(I - P) = \mathcal{N}(P)$ . (Ako by vyzeral vektor, ktorý by patril do  $\mathcal{N}(P)$  a nepatril do  $\mathcal{S}(I - P)$ ?)

7. (3.3.12) Ak  $V$  je podpriestor generovaný vektormi  $(1, 1, 0, 1)$  a  $(0, 0, 1, 0)$  nájdite

- bázu ortogonálneho doplnku  $V^\perp$ ,
- projekčnú maticu  $P$  zobrazujúcu na  $V$ ,
- vektor vo  $V$ , ktorý je najbližšie k vektoru  $b = (0, 1, 0, -1)$  z  $V^\perp$ .

8. (3.3.26) Mladý odborný asistent bol natiahnutý na škipci na dĺžky  $L = 175, 180$  a  $185$  centimetrov pri aplikovaní sily zodpovedajúcej tiaži  $F = 1, 2$  a  $4$  tony. Ak predpokladáme, že platí Hookov zákon  $L = a + bF$ , nájdite jeho pokojovú dĺžku  $a$  metódou najmenších štvorcov.

9. (3.4.2) Nájdite projekcie vektora  $b = (0, 3, 0)$  na priamky dané navzájom ortogonálnymi vektormi  $a_1 = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$  a  $a_2 = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ . Nájdite projekciu vektora  $b$  na rovinu generovanú  $a_1$  a  $a_2$ .

10. Ukážte, že ortogonálna matica, ktorá je zároveň hornou trojuholníkovou musí byť diagonálna.

11. (3.4.4) Nech  $Q_1$  a  $Q_2$  sú ortogonálne matice (t.j. spĺňajú  $Q^T Q = I$ ). Ukážte, že aj súčin  $Q_1 Q_2$  je ortogonálna matica. Ak matica  $Q_1$  reprezentuje otočenie (v  $\mathbb{R}^2$ ) o uhol  $\theta$  a matica  $Q_2$  otočenie o uhol  $\phi$ , čo bude  $Q_1 Q_2$ ? Čo bude  $Q_2 Q_1$ ? Nájdite súčtové vzorce pre  $\sin(\theta + \phi)$  a  $\cos(\theta + \phi)$  v súčine  $Q_1 Q_2$ .

12. (3.4.5) Nech  $u$  je jednotkový vektor. Ukážte, že  $Q = I - 2u^T u$  je ortogonálna matica. Táto matica reprezentuje súmernosť podľa nadroviny  $\rho = \{x \mid a^T x = 0\}$  a nazýva sa Householderova transformácia. Skúste si nakresliť obrázok, projekciu na priamku danú vektorom  $u$ , atď. Vypočítajte  $Q$  pre

$$u^T = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

**13.** (3.4.6) Nájinite tretí stĺpec matice

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{14}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{14}}{-3} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{14}} \end{bmatrix}$$

tak, aby bola ortogonálna (t.j.  $Q^T Q = I$ ). Musí to byť vektor jednotkovej dĺžky, ortogonálny na zvyšné dva stĺpce – koľko voľnosti vlastne zostáva? Ukážte, že potom budú aj riadky matice  $Q$  ortonormálne.