Lineárna algebra – Domáca úloha č. 9

Cvičenia v týždni 2. decembra 2013

---

1. (3.4.9) Ak sú vektory q_1, q_2 a q_3 ortonormálne, ktorá lineárna kombinácia q_1 a q_2 je nabližšie ku q_3?

2. (3.4.13) Použite Gram-Schmidtov proces na vektory

$$a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a vyjadrite výsledok v tvare $A = QR$.

3. (3.4.27) Nájdite ortonormálnu bázu pre podpriestor generovaný vektormi $a_1 = (1, -1, 0, 0)$, $a_2 = (0, 1, -1, 0)$ a $a_3 = (0, 0, 1, -1)$.

4. Nájdite príklad podpriestorov V a W v $\mathbb{R}^3$ tak, aby $V \cap W$ obsahovalo iba nulový vektor ale V nebol ortogonálny na W.

5. (3.R.19) Ukážte, že ak vektory $v_1, \ldots, v_n$ tvoria ortonormálnu bázu $\mathbb{R}^n$, potom $v_1 v_1^T + \cdots + v_n v_n^T = I$.

6. (3.R.20) *Pravda/Nepravda:* Ak vektory x a y sú ortogonálne a P je projekcia, potom Px a Py sú ortogonálne. Zdôvodnite.

7. (3.R.31) Ukážte, že vzdialenosť nadroviny $a^T x - c = 0$ od počiatku v $\mathbb{R}^m$ je $|c|/\|a\|$. Ako ďaleko je nadrovina $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 8$ od počiatku a ktorý jej bod je k nemu najbližšie?

8. Majme vektory $a_1 = (1, 1, 1)$ a $a_2 = (1, -1, 1)$. Maticu projekcie na vektor a_1 označme P_1 a maticu projekcie na vektor a_2 označme P_2. T.j. $P_i = \frac{a_i a_i^T}{a_i^T a_i}$. Nájdite maticu projekcie P na rovinu generovanú vektormi a_1, a_2 a presvedčte sa, že $P \neq P_1 + P_2$. Akú podmienku by museli spĺňať vektory a_1, a_2 aby takáto rovnosť platila?

9. (3.4.18) Ak $A = QR$ nájdite jednoduchý vzorec pre projekčnú maticu P zobrazujúcu do stĺpcového priestoru A.

10. (3.4.24) Nájdite nasledujúce Legendrove polynómy – t.j. polynómy stupňa 3 a 4 ortogonálne na 1, x a $x^2 - \frac{1}{3}$ na intervale $\langle -1, 1 \rangle$.

11. (3.R.39) Ako vyzerá matica $A^T A$ ak sú stĺpce matice A ortogonálne? Ako keď sú ortonormálne?

12. (3.6.1) Nech S a T sú podpriestory $\mathbb{R}^{13}$ s dimenziami $\dim S = 7$ a $\dim T = 8$.
a) Aká je najväčšia možná dimenzia $S \cap T$?
b) Aká je najmenšia možná dimenzia $S \cap T$?
c) Aká je najmenšia možná dimenzia $S + T$?
d) Aká je najväčšia možná dimenzia $S + T$?

13. (3.6.6) Ak $V \cap W = \{0\}$, potom sa súčet $V + W$ nazýva *priamy súčet* priestorov V a W. Značíme $V \oplus W$. Ak je V generovaný vektormi $(1, 1, 1)$ a $(1, 0, 1)$, nájdite W aby $V \oplus W = \mathbb{R}^3$.

14. (3.6.7) Zdôvodnite, prečo sa každý vektor x v priamom súčte $V \oplus W$ dá *jednoznačne* vyjadriť ako $x = v + w$ pre $v \in V$ a $w \in W$.

15. (3.6.8) Priestor V je generovaný vektormi $v_1 = (1, 1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1, 0)$ a priestor W vektormi $w_1 = (0, 1, 0, 1)$ a $w_2 = (0, 0, 1, 1)$. Nájdite bázu súčtu $V + W$, ako aj bázu a dimenziu prieniku $V \cap W$.