

1. (4.3.1) Pre maticu

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

nájdite (jedinú) permutáciu, ktorá bude zodpovedať nenulovému členu vo vzorci pre výpočet determinantu. Rozhodnite, či táto permutácia je párna alebo nepárna a vypočítajte $\det A$.

2. (4.3.3) *Pravda / Nepravda:* (1) Determinant súčinu $S^{-1}AS$ sa rovná determinantu matice A .
 (2) Ak $\det A = 0$, potom aspoň jeden člen v rozvoji na $(n-1) \times (n-1)$ kofaktory musí byť nula.
 (3) Matica, ktorej zložky sú iba nuly a jednotky má determinant 1, 0 alebo -1 .

3. (4.3.5) Nech D_n je determinant $(1, 1, -1)$ -tridiagonálnej matice typu $n \times n$:

$$D_n = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ 1 & 1 & -1 & & \\ & 1 & 1 & -1 & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Overte, že rozvojom podľa prvého riadku dostaneme $D_n = D_{n-1} + D_{n-2}$, čo je predpis pre *Fibonacciho postupnosť* 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

4. (4.3.8) Vysvetlite, prečo bude mať 5×5 matica s nulovou 3×3 podmaticou nulový determinant bez ohľadu na to, aké hodnoty budú na miestach označených *:

$$\text{determinant matice } A = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{bmatrix} \text{ je vždy nulový.}$$

5. (4.3.10) Vypočítajte determinant matice

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

buď elimináciou alebo rozvojom podľa riadku. Nájdite tiež determinanty menších matíc A_3 a A_2 – s nulami na diagonále a jednotkami na ostatných miestach. Vedeli by ste predpovedať hodnotu $\det A_n$?

6. (4.R.16) Nájdite $\det A$ ak $a_{ij} = i + j$.

7. (4.4.9) Vysvetlite, ak chápeme determinant ako objem, prečo $\det 3A = 3^n \det A$ pre maticu A typu $n \times n$.

8. (4.R.23) Ak $C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ a $D = \begin{bmatrix} u & v \\ w & z \end{bmatrix}$, potom rovnicu $CD = -DC$ môžeme prepísať ako

$$CD + DC = 0 \quad \text{alebo} \quad \begin{bmatrix} 2a & c & b & 0 \\ b & a+d & 0 & b \\ c & 0 & a+d & c \\ 0 & c & b & 2d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Nájdite determinant tejto 4×4 matice A .
 (b) Ukážte, že $\det A = 0$ ak $a + d = 0$ alebo $ad - bc = 0$.

Vo všetkých ostatných prípadoch môže nastať $CD = -DC$ iba pre $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

9. (4.3.9) Ukážte, že pre všeobecné matice typu 4×4 rozdelené na podbloky veľkosti 2×2 platí

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} = \det A \det D, \quad \text{ale} \quad \det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \neq \det A \det D - \det B \det C.$$

10. (4.3.13) Ak matica A je typu $m \times n$ a B je typu $n \times m$, ukážte, že

$$\det \begin{bmatrix} 0 & A \\ -B & I \end{bmatrix} = \det AB. \quad \left(\text{Pomôcka: vynásobte sprava maticou } \det \begin{bmatrix} I & 0 \\ B & I \end{bmatrix} \right)$$

Overte túto rovnosť na nejakom príklade s $m < n$ a inom s $m > n$. Prečo v druhom prípade vždy dostaneme $\det AB = 0$?

11. (4.3.12) Zistite aké znamienko prislúcha v determinante 5×5 matice súčiny $a_{15}a_{24}a_{33}a_{42}a_{51}$. Inými slovami, je permutácia $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ párna alebo nepárna?

12. (4.4.1) Nájdite determinant a všetkých deväť členov A_{ij} pre maticu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Overte, že A krát A_{adj} je $(\det A)$ -násobok jednotkovej matice. Nájdite A^{-1} .

13. (4.4.6) a) Nájdite determinant matice M , ktorá vznikne z jednotkovej matice nahradením j -teho stĺpca vektorom x :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & & x_1 & & \\ & 1 & \cdot & & \\ & & x_j & & \\ & & \cdot & 1 & \\ & & x_n & & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Ak $Ax = b$, ukážte, že matica AM je rovná matici B_j z Cramerovho pravidla (B_j vznikne z matice A nahradením j -teho stĺpca pravou stranou b).

c) Odvoďte Cramerovo pravidlo zobrazením determinantov v rovnosti $AM = B_j$.