Na prednáške sme si spomenuli, že vo vektorovom priestore, kde sú vektormi funkcie má zmysel definovať ich skalárny súčin pomocou integrálu (napr. na intervale $\langle 0,1\rangle$) ako:

$$(p(x),q(x)) = \int_0^1 p(x)q(x)dx.$$

Vektorový priestor P_n polynómov stupňa menšieho alebo rovného ako n má bázu 1, x, x^2, …, x^n. Táto báza ale nebude ortonormálna, lebo skalárny súčin polynómov x^k a x^l nie je nula ale:

$$(x^k,x^l) = \int_0^1 x^k x^l dx = \int_0^1 x^{k+l}dx = \frac{1}{k+l+1}x^{k+l+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{k+l+1}.$$

Zapísané v štvorcovej tabuľke:

	1	x	x^2	$\dots$	x^n
1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\dots$	$\frac{1}{n+1}$
x	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\dots$	$\frac{1}{n+2}$
x^2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\dots$	$\frac{1}{n+3}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x^n	$\frac{1}{n+1}$	$\frac{1}{n+2}$	$\frac{1}{n+3}$	$\dots$	$\frac{1}{2n+1}$

Napriek tomu môžeme v P_n nájsť ortonormálnu bázu, a to práve použitím Gram-Schmidtovej ortogonalizácie. Funkcie 1, x, x^2, …, x^n sú totiž lineárne nezávislé, len nie sú navzájom kolmé ani nemajú jednotkovú normu.

Gram-Schmidtova ortogonalizácia polynómov (interval 0,1):

1. krok: vektor q_1 vznikne z vektora $a_1 = 1$ normalizáciou. Lenže $||1|| = 1$, preto $q_1 = 1$.

2. krok: vektor q_2 vznikne normalizáciou z vektora $a_2' = a_2 - \mathrm{proj}_1(a_2)$. Čiže

$$a_2' = a_2 - \frac{(a_1,a_2)}{(a_1,a_1)}a_1 = x - \frac{(x,1)}{(1,1)}1 = x - \frac{1}{2}.$$

Norma a_2' je daná:

$$||a_2'||^2 = (a_2',a_2') = \int_0^1 (x-\frac{1}{2})^2 dx = \int_0^1 (x^2 - x + \frac{1}{4})dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

Preto $q_2 = \sqrt{3}(2x-1)$.

3. krok: vektor q_3 vznikne normalizáciou z vektora $a_3' = a_3 - \mathrm{proj}_1(a_3) - \mathrm{proj}_2(a_3)$. Čiže

$$a_3' = a_3 - \frac{(a_1,a_3)}{(a_1,a_1)}a_1 - \frac{(a_2',a_3)}{(a_2',a_2')}a_2' = x^2 - \frac{(x^2,1)}{(1,1)}1 - \frac{(x^2, x-\frac{1}{2})}{(x-\frac{1}{2}, x-\frac{1}{2})}(x-\frac{1}{2}) =$$

$$= x^2 - \frac{1}{3} - \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12}}(x - \frac{1}{2}) = x^2 - x + \frac{1}{6}.$$

Norma a_3' je daná:

$$||a_3'||^2 = (a_3',a_3') = \int_0^1 (x^2 - x + \frac{1}{6})^2 dx = \int_0^1 (x^4 - 2x^3 + \frac{8}{6}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{36})dx =$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{2}{4} + \frac{8}{18} - \frac{1}{6} + \frac{1}{36} = \frac{1}{180}.$$

Preto $q_3 = \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1)$.

4. krok: skúste sami. Štvrtá funkcia q_4 by mala výjsť $q_4 = \sqrt{7}(20x^3 - 30x^2 + 12x - 1)$.
Takýmto spoôsobom sme postupne našli tzv. *posunuté Legendrove polynómy.*

Iný skalárny súčin - interval $\langle -1, 1\rangle$

V predchádzajúcej diskusii sme používali skalárny súčin na priestore funkcií definovaný integrovaním cez interval $\langle 0, 1\rangle$. Ak by sme ho nahradili integrovaním cez interval $\langle -1, 1\rangle$, dostali by sme iné výsledky:

$$(p(x), q(x)) = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx.$$

Potom skalárny súčin polynómov x^k a x^l bude:

$$(x^k, x^l) = \int_{-1}^{1} x^k x^l dx = \int_{-1}^{1} x^{k+l} dx = \frac{1}{k+l+1} x^{k+l+1}\Big|_{-1}^{1} = \begin{cases} \frac{2}{k+l+1} & \text{ak } k+l \text{ je párne,} \\ 0 & \text{ak } k+l \text{ je nepárne.} \end{cases}$$

Zapísané v štvorcovej tabuľke pre malé k, l:

	1	x	x^2	x^3	x^4	x^5
1	2	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{5}$	0
x	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{2}{7}$
x^2	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{2}{7}$	0
x^3	0	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{2}{7}$	0	$\frac{2}{9}$
x^4	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{2}{7}$	0	$\frac{2}{9}$	0
x^5	0	$\frac{2}{7}$	0	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{2}{11}$

Opäť môžeme ortogonalizovať vektory 1, x, x^2, x^3, x^4, atď.

Gram-Schmidtova ortogonalizácia polynómov (interval -1,1):

1. krok: vektor q_1 vznikne z vektora $a_1 = 1$ normalizáciou. Lenže $||1|| = 2$, preto $q_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

2. krok: vektor q_2 vznikne normalizáciou z vektora $a_2' = a_2 - \mathrm{proj}_1(a_2)$. Čiže

$$a_2' = a_2 - \frac{(a_1, a_2)}{(a_1, a_1)} a_1 = x - \frac{(x, 1)}{(1, 1)} 1 = x - 0 = x.$$

Norma a_2' je daná:

$$||a_2'||^2 = (a_2', a_2') = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}.$$

Preto $q_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} x$.

3. krok: vektor q_3 vznikne normalizáciou z vektora $a_3' = a_3 - \mathrm{proj}_1(a_3) - \mathrm{proj}_2(a_3)$. Čiže

$$a_3' = a_3 - \frac{(a_1, a_3)}{(a_1, a_1)} a_1 - \frac{(a_2', a_3)}{(a_2', a_2')} a_2' = x^2 - \frac{(x^2, 1)}{(1, 1)} 1 - \frac{(x^2, x)}{(x, x)} x == x^2 - \frac{1}{3} - 0x = x^2 - \frac{1}{3}.$$

Norma a_3' je daná:

$$||a_3'||^2 = (a_3', a_3') = \int_{-1}^{1} (x^2 - \frac{1}{3})^2 dx = \int_{-1}^{1} (x^4 - \frac{2}{3} x^2 + \frac{1}{9} x) dx = \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{15}.$$

Preto $q_3 = \sqrt{\frac{5}{3}} (3x^2 - 1)$.

4. krok: vektor q_4 vznikne normalizáciou z vektora $a_4' = a_4 - \mathrm{proj}_1(a_4) - \mathrm{proj}_2(a_4) - \mathrm{proj}_3(a_4)$. Čiže

$$a_4' = a_4 - \frac{(a_1, a_4)}{(a_1, a_1)} a_1 - \frac{(a_2', a_4)}{(a_2', a_2')} a_2' - \frac{(a_3', a_4)}{(a_3', a_3')} a_3' = x^3 - \frac{(x^3, 1)}{(1, 1)} 1 - \frac{(x^3, x)}{(x, x)} x - \frac{(x^3, x^2 - \frac{1}{3})}{(x^2 - \frac{1}{3}, x^2 - \frac{1}{3})} (x^2 - \frac{1}{3}) =$$

$$= x^3 - 0 - \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}} x - 0(x^2 - \frac{1}{3}) = x^3 - \frac{3}{5}x.$$

Norma a_4' je daná:

$$||a_4'||^2 = (a_4', a_4') = \int_{-1}^{1} (x^3 - \frac{3}{5}x)^2 dx = \int_{-1}^{1} (x^6 - \frac{6}{5}x^3 + \frac{9}{25}x^2) dx = \frac{2}{7} - 0 + \frac{6}{25} = \frac{92}{175}.$$

A tak ďalej ...

Takto postupne získavame *Legendrove polynómy.* Viac o nich sa môžete dočítať v článkoch na Wikipédii alebo v MathWorlde, sú tam aj obrázky. Legendrove polynómy sa spravidla zvyknú normalizovať tak, aby $P_n(1) = 1$, teda aby hodnota v jednotke bola jeden a nie pomocou normy, ako sme to urobili my tu. Potom prvých sedem je:

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1 \\
P_1(x) &= x \\
P_2(x) &= \tfrac{1}{2}(3x^2 - 1) \\
P_3(x) &= \tfrac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\
P_4(x) &= \tfrac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\
P_5(x) &= \tfrac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \\
P_6(x) &= \tfrac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)
\end{aligned}$$