Lineárna algebra – Domáca úloha č. 3

Cvičenia v týždni 12. októbra 2015

1. (1.5.9) a) Za akých podmienok je matica A regulárna, ak A vznikne ako súčin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}?$$

b) Namiesto klasického riešenia systému $Ax = b$ pomocou substitúcie do $Ux = c$, riešte pomocou nového vektora neznámych c v rovnici $Lc = b$ pre

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = b.$$

2. (1.5.11) Nájdite riešenie $LUx = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$
bez toho, aby ste roznásobovali LU.

3. (1.5.10) a) Prečo potrebujeme zhruba $n^2/2$ operácií násobenia-odčítania na vyriešenie redukovaného systému $Ux = c$, resp. $Lc = b$?
b) Koľko takýchto operácií treba pri eliminácii $n \times n$ matice?

4. (1.6.6) Nájdite inverzné matice k maticiam

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. (1.6.9) Pre maticu

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

eliminácia zlyhá. Ukážte, že k takejto matici neexistuje inverzná. Tretí riadok inverznej matice A^{-1} násobený maticou A by mal dať tretí riadok súčinu $A^{-1}A = I$. Prečo je to nemožné?

6. (1.6.12) Ktoré z vlastností matice sa zachovávajú aj pre maticu k nej inverznú?
a) A je trojuholníková,
b) A je symetrická,
c) A je tridiagonálna (t.j. nenulové prvky môžu byť iba na hlavnej diagonále a na dvoch diagonálach s ňou susediacich),
d) všetky zložky A sú celé čísla,
e) všetky zložky A sú racionálne čísla.

7. (1.6.14) Ukážte, že (aj) pre obdĺžnikové matice sú matice AA^T a A^TA vždy symetrické. Ukážte na príklade, že sa tieto matice nemusia rovnať, a to ani pre štvorcové matice.

8. (1.6.16) (a) Koľko je navzájom nezávislých zložiek v symetrickej matici typu $n \times n$?
(b) Koľko je navzájom nezávislých zložiek v antisymetrickej matici typu $n \times n$?

9. (1.6.17) (a) Ak v rozklade $A = LDU$ máme na diagonálach trojuholníkových matíc L a U jednotky, ako bude vyzerať rozklad matice A^T? Všimnite si, že matice A a A^T (v prípade, že počas eliminácie nedochádza k výmene riadkov) majú rovnaké vedúce prvky.

(b) Ako vyzerá vyzerá systém v hornom trojuholníkovom tvare pre $A^T y = b$?

10. (1.7.5) Nájdite inverznú maticu pre 3×3 Hilbertovu maticu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

pomocou Gaussovej emiminácie dvoma spôsobmi – najprv presným výpočtom so zlomkami, potom so zaokrúhlovaním každej zložky na tri platné číslice. Porovnajte.

11. (1.R.6,7) a) Existuje 16 rôznych 2×2 matíc so zložkami 0 alebo 1. Koľko z nich je invertibilných?

b) Podobne, máme šesťnásť rôznych 2×2 matíc so zložkami 1 alebo -1. Koľko z nich je invertibilných?

c) (o dosť ťažšie) Ak náhodne vpíšeme nuly a jednotky do 10×10 matice, je pravdepodobnejšie, že bude regulárna alebo singulárna?

12. (1.R.10) Nájdite inverzné matice, ak existujú, pre:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{a} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ako by vyzerali inverzné matice pre $n \times n$ matice v takomto tvare? Čo by sa stalo, ak by sme v nich zmenili dvojky na nejaký všeobecný parameter k?

13. Ak by sme zobrali n-tice čísel zo $\mathbb{Z}_5$, t.j. zvyškov po delení piatimi, dostali by sme množinu $\mathbb{Z}_5^n$. Ukážte, že takáto množina spolu so sčítaním po zložkách (sčítavame zvyškové triedy) a násobením skalárom zo $\mathbb{Z}_5$ bude spĺňať vlastnosti, ktoré požadujeme od vektorového priestoru.

Čo zlyhá, ak by sme niečo podobné skúsili spraviť na množine $\mathbb{Z}_6^n$?

14.* (1.6.23) Nech A a B sú štvorcové matice. Ukážte, že $I - AB$ je invertibilná práve vtedy, keď $I - BA$ je invertibilná. Výjdite z rovnosti $B(I - AB) = (I - BA)B$. Venujte špeciálnu pozornosť prípadu, keď je matica B singulárna.