

1. (1.4.11) Pravda/Nepravda. Zdôvodnite ak je tvrdenie pravdivé, ukážte konkrétny protipríklad ak je nepravdivé.

- (i) Ak sú prvý a tretí stĺpec matice  $B$  rovnaké, potom sú rovnaké aj prvý a tretí stĺpec súčinu  $AB$ .
- (ii) Ak sú prvý a tretí riadok matice  $B$  rovnaké, potom sú rovnaké aj prvý a tretí riadok súčinu  $AB$ .
- (iii) Ak sú prvý a tretí riadok matice  $A$  rovnaké, potom sú rovnaké aj prvý a tretí riadok súčinu  $AB$ .
- (iv)  $(AB)^2 = A^2B^2$ .

2. (1.4.14) Metódou pokusov a omylov s maticami typu  $2 \times 2$  nájdite príklady matíc, ktoré spĺňajú:

- (i)  $A^2 = -I$ ,  $A$  má reálne zložky,
- (ii)  $B^2 = 0$ , ale  $B \neq 0$ ,
- (iii)  $CD = -DC$ , pritom  $CD \neq 0$ ,
- (iv)  $EF = 0$ , pričom žiadna zo zložiek  $E$  a  $F$  nie je nulová.

3. (1.4.22) Matice, ktoré popisujú rotáciu roviny  $x-y$  majú tvar

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

- a) Overte, že  $A(\theta_1)A(\theta_2) = A(\theta_1\theta_2)$ , použijúc súčtové vzorce pre sínus a kosínus.
- b) Čo dostaneme súčinom  $A(\theta)$  a  $A(-\theta)$ ?

4. (1.4.23) Pre matice

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{a} \quad C = AB = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

nájdite mocniny  $A^2, A^3, \dots, B^2, B^3, \dots$  a  $C^2, C^3, \dots$

5. (1.5.18) Rozhodnite či sú nasledujúce systémy singulárne alebo regulárne, či nemajú ani jedno, práve jedno alebo nekonečne veľa riešení:

$$\begin{array}{ccc} v-w=2 & v-w=0 & v+w=1 \\ u-v=2 & u-v=0 & u+v=1 \\ u-w=2 & u-w=0 & u+w=1 \end{array} \quad \text{a}$$

6. (1.6.2) a) Nájdite inverzné matice k permutačným maticiam

$$P_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad P_{132} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Vysvetlite prečo je pre permutačné matice  $P^{-1}$  vždy rovnaká ako  $P^T$ . Ukážte, že jednotky v súčine  $PP^T$  budú na správnom mieste a naozaj dostaneme  $PP^T = I$ .

- 7. (1.6.4) (a) Ak je  $A$  invertibilná matica a  $AB = AC$ , dokažte, že  $B = C$ .
- (b) Pre  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  nájdite matice  $B$  a  $C$ , pre ktoré  $AB = AC$  ale  $B \neq C$ .

8. (1.5.5) Nájdite  $LU$  rozklad pre maticu  $A$ , ako aj lineárny systém  $Ux = c$  v hornom trojuholníkovom tvare, ktorý vznikne elimináciou pre

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

9. (1.5.15 + rozšírenie) Nájdite rozklady  $PA = LDU$  (a skontrolujte ich) pre

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

V oboch prípadoch robte elimináciu tak, ako ste zvyknutí, ale navyše si zapíšte každú elementárnu maticu. V prvom prípade by Vám malo výjsť poradie  $P, E_{3,1}, E_{3,2}$ , teda rovnosť  $E_{3,2}E_{3,1}PA = U$ , z čoho sa už ľahko dá nájsť rozklad.

V druhom prípade by poradie malo výjsť  $E'_{2,1}, E'_{3,1}, P'$ , teda rovnosť  $P'E'_{3,1}E'_{2,1}A' = U'$ . Matice  $P'$  a  $E'_{3,1}$ , resp.  $E'_{2,1}$ , nekomutujú, ale platí  $P'E_{3,1} = F_{2,1}P'$  pre nejakú inú elementárnu maticu  $F_{2,1}$ , a tiež  $P'E_{2,1} = F_{3,1}P'$  pre nejakú  $F_{3,1}$ . Ukážte, že matice  $F_{2,1}$  a  $F_{3,1}$  navzájom komutujú, čiže môžeme prejsť k rovnosti  $P'E'_{3,1}E'_{2,1}A' = F_{3,1}F_{2,1}P'A' = U'$ . Vysvetlite čo postupnosť operácií daných maticami  $P', F_{2,1}$  a  $F_{3,1}$  robí so systémom, a aký je význam danej maticovej rovnosti  $P'E'_{3,1}E'_{2,1} = F_{3,1}F_{2,1}P'$ .