Lineárna algebra – Domáca úloha č. 5

Pre týždeň 24. októbra 2016.

---

1. (1.6.5) Ak B je inverzná matica k A^2, ukážte, že inverzná matica k (štvorcovej) A bude AB.
Pozn. Uvedomte si, že to znamená, že A je invertibilná práve vtedy, keď A^2 je. Ako by sa toto tvrdenie dalo dokázať pomocou skúmania hodností, nulových resp. stĺpcových priestorov matíc A a A^2?

2. (1.R.15) Nájdite hodnotu c v nasledujúcej $n \times n$ inverznej matici:

$$\text{ak } A = \begin{bmatrix} n & -1 & \cdot & -1 \\ -1 & n & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & -1 & \cdot & n \end{bmatrix}, \text{ potom } A^{-1} = \frac{1}{n+1} \begin{bmatrix} c & 1 & \cdot & 1 \\ 1 & c & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \cdot & c \end{bmatrix}.$$

Pozn. n vo veľkosti $n \times n$ matice a n vovnútri matice A je to isté n.

3. (1.R.18) Predpokladajme, že 4×4 matica A má tvar :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & v_1 & 0 & 0 \\ 0 & v_2 & 0 & 0 \\ 0 & v_3 & 1 & 0 \\ 0 & v_4 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

teda ide o maticu, ktorá vznikla z jednotkovej nahradením druhého stĺpca nejakým vektorom v.
a) Akú podmienku musí spĺňať vektor v, aby bola matica A regulárna?
Návod: skúste sa pozrieť na priestor $\mathcal{S}(A)$.
b) Pre regulárne A nájdite jej LU rozklad.
c) Pre regulárnu A nájdite aj A^{-1}.

4. (2.R.13) Pomocou eliminácie nájdite rozklad matice $A = LU$, ak

$$A = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{bmatrix}.$$

Akú podmienku musia spĺňať čísla a, b, c, d aby boli stĺpce A lineárne nezávislé?

5. (2.3.2 b,c) Rozhodnite či sú nasledujúce vektory lineárne závislé alebo nezávislé:
b) $v_1 - v_2$, $v_2 - v_3$, $v_3 - v_4$, $v_4 - v_1$ pre ľubovoľné vektory v_1, v_2, v_3 a v_4,
c) $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$ a (x, y, z), kde x, y a z sú ľubovoľné reálne čísla.

6. (2.3.4) Je pravda, že ak sú vektory v_1, v_2 a v_3 lineárne nezávislé, potom sú aj vektory $w_1 = v_1 + v_2$, $w_2 = v_1 + v_3$ a $w_3 = v_2 + v_3$ lineárne nezávislé? *Pomôcka:* Predpokladajte $c_1w_1 + c_2w_2 + c_3w_3 = 0$ a nájdite vhodné c_i.

7. (2.3.15) Predpokladajme, že priestor V má dimenziu k. Ukážte, že
a) ľubovoľných k lineárne nezávislých vektorov vo V tvorí jeho bázu,
b) ľubovoľných k vektorov, ktoré generujú celé V tvorí jeho bázu.

8. (2.3.17) Ukážte, že ak V a W sú trojrozmerné podpriestory priestoru $\mathbb{R}^5$, potom existuje nenulový vektor patriaci do V aj W, teda $V \cap W \neq \{0\}$.

9. (2.3.20) a) V priestore matíc typu 2×2 nájdite bázu podpriestoru P – matíc, pre ktoré sa súčty zložiek v riadkoch aj stĺpcoch rovnajú. Teda

$$P = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \, a + b = c + d = a + c = b + d \right\}.$$

b) Nájdite päť lineárne nezávislých matíc typu 3×3 s touto vlastnosťou.

10. (2.3.18, 2.3.22, 2.4.21) Pravda/nepravda. Zdôvodnite.
a) Ak sú stĺpce matice A lineárne nezávislé, potom má systém $Ax = b$ práve jedno riešenie pre každé b.
b) Matica typu 5×7 nikdy nemôže mať lineárne nezávislé stĺpce.
c) Každá báza podpriestoru W sa dá rozšíriť na bázu priestoru V. (predpokladajme $\dim W \neq \dim V$)
d) Každá báza priestoru V sa dá zredukovať na bázu podpriestoru W. (opäť $\dim W \neq \dim V$)
e) Ak sú štyri základné podpriestory matice A rovnaké ako tie pre maticu B, potom $A = B$.

11. (2.4.3) a) Nájdite dimenzie a bázy pre všetky štyri základné podpriestory pre matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{a} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

12. (2.4.6) Ukážte, že systém $Ax = b$ má riešenie práve vtedy, ak hodnosť(A) = hodnosť(A'), kde matica A' je matica, ktorú získame z A pridaním b ako stĺpca navyše.

13. (2.4.20) Nájdite maticu s požadovanými vlastnosťami, alebo dokážte, že taká nemôže existovať.
a) Stĺpcový priestor obsahuje $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, riadkový priestor obsahuje $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.
b) Stĺpcový priestor má bázu $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, nulový priestor má bázu $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.
c) Stĺpcový priestor $= \mathbb{R}^4$, riadkový priestor $= \mathbb{R}^3$.