

1. (4.3.1) Pre maticu

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

nájdite (jedinú) permutáciu, ktorá bude zodpovedať nenulovému členu vo vzorci pre výpočet determinantu. Rozhodnite, či táto permutácia je párna alebo nepárna a vypočítajte  $\det A$ .

2. (4.3.3) *Pravda / Nepravda:* (1) Determinant súčinu  $S^{-1}AS$  sa rovná determinantu matice  $A$ .  
 (2) Ak  $\det A = 0$ , potom aspoň jeden člen v rozvoji na  $(n-1) \times (n-1)$  kofaktory musí byť nula.  
 (3) Matica, ktorej zložky sú iba nuly a jednotky má determinant 1, 0 alebo  $-1$ .

3. (4.3.5) Nech  $D_n$  je determinant  $(1, 1, -1)$ -tridiagonálnej matice typu  $n \times n$ :

$$D_n = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ 1 & 1 & -1 & & \\ & 1 & 1 & -1 & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Overte, že rozvojom podľa prvého riadku dostaneme  $D_n = D_{n-1} + D_{n-2}$ , čo je predpis pre *Fibonacciho postupnosť* 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

4. (4.3.8) Vysvetlite, prečo bude mať  $5 \times 5$  matica s nulovou  $3 \times 3$  podmaticou nulový determinant bez ohľadu na to, aké hodnoty budú na miestach označených \*:

$$\text{determinant matice } A = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{bmatrix} \text{ je vždy nulový.}$$

5. (4.3.10) Vypočítajte determinant matice

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

buď elimináciou alebo rozvojom podľa riadku. Nájdite tiež determinanty menších matíc  $A_3$  a  $A_2$  – s nulami na diagonále a jednotkami na ostatných miestach. Vedeli by ste predpovedať hodnotu  $\det A_n$ ?

6. (4.R.16) Nájdite  $\det A$  ak  $a_{ij} = i + j$ .

7. (4.4.9) Vysvetlite, ak chápeme determinant ako objem, prečo  $\det 3A = 3^n \det A$  pre maticu  $A$  typu  $n \times n$ .

8. (4.R.23) Ak  $C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  a  $D = \begin{bmatrix} u & v \\ w & z \end{bmatrix}$ , potom rovnicu  $CD = -DC$  môžeme prepísať ako

$$CD + DC = 0 \quad \text{alebo} \quad \begin{bmatrix} 2a & c & b & 0 \\ b & a+d & 0 & b \\ c & 0 & a+d & c \\ 0 & c & b & 2d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Nájdite determinant tejto  $4 \times 4$  matice  $A$ .  
 (b) Ukážte, že  $\det A = 0$  ak  $a + d = 0$  alebo  $ad - bc = 0$ .

Vo všetkých ostatných prípadoch môže nastať  $CD = -DC$  iba pre  $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

9. (4.3.9) Ukážte, že pre všeobecné matice typu  $4 \times 4$  rozdelené na podbloky veľkosti  $2 \times 2$  platí

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} = \det A \det D, \quad \text{ale} \quad \det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \neq \det A \det D - \det B \det C.$$

10. (4.3.13) Ak matica  $A$  je typu  $m \times n$  a  $B$  je typu  $n \times m$ , ukážte, že

$$\det \begin{bmatrix} 0 & A \\ -B & I \end{bmatrix} = \det AB. \quad \left( \text{Pomôcka: vynásobte sprava maticou } \det \begin{bmatrix} I & 0 \\ B & I \end{bmatrix} \right)$$

Overte túto rovnosť na nejakom príklade s  $m < n$  a inom s  $m > n$ . Prečo v druhom prípade vždy dostaneme  $\det AB = 0$ ?

11. (4.3.12) Zistite aké znamienko prislúcha v determinante  $5 \times 5$  matice súčinnu  $a_{15}a_{24}a_{33}a_{42}a_{51}$ . Inými slovami, je permutácia  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  párna alebo nepárna?

12. (4.4.1) Nájdite determinant a všetkých deväť členov  $A_{ij}$  pre maticu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Overte, že  $A$  krát  $A_{\text{adj}}$  je  $(\det A)$ -násobok jednotkovej matice. Nájdite  $A^{-1}$ .

13. (4.4.6) a) Nájdite determinant matice  $M$ , ktorá vznikne z jednotkovej matice nahradením  $j$ -teho stĺpca vektorom  $x$ :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & & x_1 & & \\ & 1 & \cdot & & \\ & & x_j & & \\ & & \cdot & 1 & \\ & & x_n & & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Ak  $Ax = b$ , ukážte, že matica  $AM$  je rovná matici  $B_j$  z Cramerovho pravidla ( $B_j$  vznikne z matice  $A$  nahradením  $j$ -teho stĺpca pravou stranou  $b$ ).

c) Odvoďte Cramerovo pravidlo zobrazením determinantov v rovnosti  $AM = B_j$ .