Lineárna algebra – Domáca úloha č. 6

Pre týždeň 4. novembra 2019

---

1. (2.4.8) Prečo nemôže existovať matica, ktorej nulový aj riadkový priestor by obsahovali vektor $[1, 1, 1, 1]^T$?

2. (2.4.12) Nech $Ax = 0$ má netriviálne riešenie. Ukážte, že $A^T y = f$ nebude mať riešenie pre nejaké f. Nájdite príklad takého A a f.

3. (2.4.17) (*Paradox*) Majme pravú inverznú maticu k A, teda $AB = I$. Po prenásobení maticou A^T dostaneme $A^T AB = A^T$, z čoho $B = (A^T A)^{-1} A^T$. Ale potom $BA = I$, t.j. B by mala byť aj *ľavá* inverzná matica k A. Ktorý krok v tomto "dôkaze" je nekorektný?

4. (2.R.3) Pravda/Nepravda (nájdite zdôvodnenie, resp. protipríklad):
a) Ak vektory $x_1, x_2, \dots, x_m$ generujú priestor S, potom $\dim S = m$.
b) Prienik dvoch podpriestorov vektorového priestoru X nemôže byť prázdny.
c) Ak $Ax = Ay$, potom $x = y$.
d) Ak má štvorcová matica A lineárne nezávisle stĺpce, potom ich má aj matica A^2.

5. (2.R.9) Vo vektorovom priestore matíc typu 2×2,
a) budú tvoriť matice s hodnosťou 1 vektorový podpriestor?
b) bude podpriestor generovaný permutačnými maticami vyzerať ako?
c) bude podpriestor generovaný kladnými maticami (t.j. všetky $a_{ij} > 0$) vyzerať ako?
d) bude podpriestor generovaný invertibilnými maticami vyzerať ako?

6. (2.R.17) Ak pre vektor $x \in \mathbb{R}^n$ platí $x^T y = 0$ pre každé $y \in \mathbb{R}^n$, ukážte, že $x = 0$.

7. (2.R.18) Ak A je $n \times n$ matica spĺňajúca $A^2 = A$ a A má hodnosť n, potom ukážte, že $A = I$.

8. (2.R.20) Koľko 5×5 permutačných matíc existuje? Sú lineárne nezávislé v $M_{5,5}$? Generujú celý priestor $M_{5,5}$ matíc typu 5×5? (Netreba ich vypisovať všetky)

9. (2.R.22) a) Akú podmienku musí spĺňať pravá strana b, aby mal systém $Ax = b$ riešenie, ak

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{a} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}?$$

b) Nájdite bázu nulového priestoru matice A.
c) Nájdite všeobecné riešenie systému $Ax = b$, ak riešenie existuje.
d) Nájdite bázu stĺpcového priestoru matice A.
e) Aká je hodnosť matice A^T?

10. Uvažujme vektorový priestor $\mathcal{P}_6$ reálnych polynómov stupňa nanajvýš 6 v premennej x. Ukážte, že $\mathcal{P}_6(0)$ – množina polynómov, pre ktoré je 0 koreňom, bude podpriestorom $\mathcal{P}_6$. Nájdite dimenziu a bázu $\mathcal{P}_6(0)$.
Podobne uvažujme polynómy s koreňom 1: $\mathcal{P}_6(1) = \{\, p(x) \,|\, p(1) = 0, p(x) \in \mathcal{P}_6\}$. Nájdite dimenziu a bázu $\mathcal{P}_6(1)$. Čo bude prienik $\mathcal{P}_6(0) \cap \mathcal{P}_6(1)$, akú bude mať dimenziu?

11. (2.6.3) Rozhodnite, či zloženie piatich osových symetrií a ôsmich rotácí roviny dá rotáciu alebo osovú symetriu. Záleží na poradí v ktorom tieto transformácie robíme?

12. (2.6.7) Nájdite matice typu 3×3 reprezentujúce transformácie v $\mathbb{R}^3$, ktoré
i) sprojektujú každý vektor do roviny xy,
ii) zobrazia každy vektor symetricky podľa roviny xy,
iii) otočia rovinu xy o uhol γ, nechajúc os z namieste,

iv) otočia rovinu xy, potom rovinu xz a nakoniec rovinu yz, vždy o $90°$,
v) spravia tie isté rotácie ako v iv) len vždy o $180°$.

13. (2.6.16) Priestor všetkých matíc typu 2×2 má štyri bázové "vektory"

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ukážte, že operácia *transpozície* je lineárnou transformáciou na tomto priestore a nájdite príslušnú maticu A v tejto báze. Prečo platí $A^2 = I$?