Preto: $[a\ b] = [a\ 0] + [0\ b]$ $\quad [c\ d] = [c\ 0] + [0\ d]$

Potom použijúc linearitu $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix}$

pre $n \times n$ maticu by sme dostali n^n členov (veľmi veľa), veľká časť z nich však bude nulová.

- kedy to nastáva? keď sú v jednom stĺpci dve zložky, alebo iná predaní, v inom sú 0.
- preto (n) nenulových zložiek musí byť v rôznych stĺpcoch.

pre 3x3 maticu dostávame:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & a_{33} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} & a_{12} & \\ & & a_{23} \\ a_{31} & & \end{vmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} & & a_{13} \\ a_{21} & & \\ & a_{32} & \end{vmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & & \\ & & a_{23} \\ & a_{32} & \end{vmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} & a_{12} & \\ a_{21} & & \\ & & a_{33} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} & & a_{13} \\ & a_{22} & \\ a_{31} & & \end{vmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- bude ich 6, každá zodpovedá permutácii σ:

Máme členy: $a_{1\sigma(1)}, a_{2\sigma(2)}, a_{3\sigma(3)}$

POKIAĽ TO 22.11.

Ak sme pri odvodzovaní determinantu pre 3x3 maticu prišli k nasledovnému:

$$\boxed{\det A = \sum_{\sigma} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} \det P_\sigma}$$

σ zodpovedá permutácii množiny $\{1,2,3,\dots,n\}$ P_σ permutačná matica.

teda len určiť determinant matice P_σ.

tabuľka permutácii

tice P — sme dostali. I výmena riadkov,

bude

pričom

- znamienko v $\det P_\sigma$ závisí od parity počtu výmen riadkov.

- Ako sa presvedčiť, že sme naozaj našli determinant mal by mať III vlastnosti:

  (I) $\det I = 1$ — to platí (lebo jediný nenulový súčin je $a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$)

  (II) $\det A = -\det A'$ pri výmene riadkov (ukážeme neskôr)

  (III) linearita v prvom riadku.

zamyslime sa nad tým trochu...
máme $n!$ členov. Z nich $(n-1)!$ obsahuje a_{11}
$(n-1)!$ obsahuje a_{12}
$\vdots$
$(n-1)!$ obsahuje a_{1n}

teda ich môžeme dať dohromady nasledovne:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}$$

kde $$A_{11} = \sum_{\substack{\sigma' \\ \sigma'(1)=1}} a_{2\sigma'(2)}\, a_{3\sigma'(3)} \dots a_{n\sigma'(n)} \det P_{\sigma'}$$

podobne nejaký súčet $(n-1)!$ členov pre A_{12},
všimnime si ale dôležitú vec:
vo vzorci pre A_{11} sú len členy z riadkov
podobne pre $A_{12}, A_{13}, \dots, A_{1n}$.

Preto $\det A$ naozaj závisí lineárne od pr...

Ako vypočítať členy $A_{11}, A_{12}, \dots$?

čo vlastne robíme? (pre 3x3 matice)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & a_{23} \\ & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & a_{12} & \\ a_{21} & & a_{23} \\ a_{31} & & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & & \\ a_{21} & a_{22} & \\ a_{31} & a_{32} & \end{vmatrix}$$

Ak sa na to pozrieme bližšie, uvidíme nasledovné:

Teda $\det A = a_{11} \cdot \det \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \det \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \det \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

Preto $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$, kde M_{ij} (minor) vzniká z A vyhodením i-tého riadku a j-tého stĺpca.

zodp. identickej permutácii $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$

Týmto dostávame vyjadrenie determinantu $n \times n$ matice podľa determinantov $(n-1) \times (n-1)$ minorov, každý z nich vznikne vyhodením patričného stĺpca a riadku.

<u>Pozn</u> 1) Všetko sme mohli robiť pre všeobecný (i-tý) riadok, - aj prešlo by to.

2) Keďže $\det A = \det A^T$, môžeme rovnako hovoriť aj o rozvoji determinantu podľa stĺpca.

3) Tento rozvoj sa nazýva aj Laplaceov rozvoj determinantu.

<u>Príklad</u>

$$A_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

prvom riadku máme len 2 nenulové členy, preto

$$\det A_n = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} =$$
$$= 2 A_{n-1} + (-1)(-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 & & \\ 0 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & -1 \\ & & & \ddots \end{vmatrix} = 2A_{n-1} + (-1)(-1)(-1) A_{n-2}$$

$$= 2A_{n-1} - A_{n-2}.$$

$A_2 = 3$, $A_1 = 2$, z čoho dostaneme $A_n = n+1$, lebo

$n+1 = 2 \cdot n - (n-1)$.

Aplikácie determinantov

A_{adj} adjungovaná matica

① Výpočet A^{-1}

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \det A & 0 & 0 & \dots 0 \\ 0 & \det A & 0 & \dots 0 \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{bmatrix}$$

diagonálne členy súčinu sú $\det A$ – vždy totiž máme rozvoj determinantu podľa príslušného riadku.

Prečo však bodu inde 0?

čo je $a_{11} A_{21} + a_{12} A_{22} + \dots + a_{1n} A_{2n} = ?$

je to determinant, kde sme vymazali druhý riadok $(A_{21}, A_{22}, \dots, A_{2n})$ a na tom pôvodne boli $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$

$$= \det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \text{rozvoj podľa 2. riadku.}$$

lenže tento determinant je nulový (dva rovnaké)

podobne pre všetky ostatné nuly ...

Záver $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \left[A_{ji} \right]$

Poznámka ku grupám asociatívnosť

pokračuje 28.11

Príklad $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ potom $A_{11} = d$, $A_{12} = -$

$A_{adj} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$, $A \cdot A_{adj} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} [$

(11) Riešenie $Ax=b$

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{\det A} A_{adj}\, b$$

lenže to môžeme napísať aj inak!

<u>Cramerovo pravidlo</u>: Pre j-tu zložku $x = A^{-1}b$ máme

$$x_j = \frac{\det B_j}{\det A} \quad \text{kde} \quad B_j = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & b_n & a_{nn} \end{bmatrix}$$

j-tý stĺpec

v B_j nahradíme j-tý stĺpec vektorom b.

<u>Dôkaz</u>: Rozvinime $\det B_j$ podľa stĺpca s b-čkami a dostaneme:

$$\det B_j = b_1 \cdot A_{1j} + b_2 A_{2j} + \dots + b_n A_{nj}$$

lenže toto je presne j-tý riadok A_{adj}. prenásobený b.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{1j} & A_{2j} & \dots & A_{nj} \\ A_{1n} & A_{2n} & & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Predelením $\det A$ dostaneme Cram. prav.

<u>Objem rovnobežnostena</u>:

Ako získať vzťah medzi objemom a determinantom?

pokladajme, že najprv, že vektory sú kolmé.
(tentokrát to budú riadky)

$$\text{Objem} = l_1 \cdot l_2 \dots l_n \quad \text{(dĺžky vektorov).}$$

zapíšeme do matice A, potom:

$$= \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1^2 & & & \\ & l_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & l_n^2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\dots) = \det(A)^2.$$