

Podvázanie pri písomke je vážnym porušením Študijného poriadku FMFI UK, ktoré môže viesť k vylúčeniu zo štúdia. Nerobte hlúposti. Počas písomky je zakázané používať mobilné telefóny a iné elektronické zariadenia. Veľa zdaru!

Písomka z Lineárnej algebrы a geometrie I., 13. november 2019

1. Pre maticu

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- nájdite dimenzie a bázy jej nulového priestoru $\mathcal{N}(A)$ a stĺpcového priestoru $\mathcal{S}(A)$,
- nájdite rovnicu/e, ktorú/é musia spĺňať zložky vektora $b \in \mathcal{S}(A)$.
- pre (každé) $b \in \mathcal{S}(A)$ nájdite všeobecné riešenie systému $Ax = b$.

2. Pre reálne $q \neq 0$ uvažujme maticu

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 1 & 0 \\ 0 & 1 & q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Nájdite bázu a dimenziu nulového priestoru $\mathcal{N}(X)$ a bázu a dimenziu stĺpcového priestoru $\mathcal{S}(X)$.
 - Ukážte, že matica $A = qI - X$ bude regulárna.
 - Nájdite k nej inverznú A^{-1} .
3. Na vektorovom priestore $M_{2,2}$ matíc typu 2×2 definujme zobrazenie L_{21} tak, že matici A sa priradí $A' = L_{21}(A)$, ktorá vznikne z A pripočítaním k -násobku 1. riadku k 2. riadku.
- Ukážte, že L_{21} je lineárne zobrazenie.
 - Nájdite nejakú bázu priestoru $M_{2,2}$ a maticu zobrazenia L_{21} vzhľadom na túto bázu.
 - Nájdite jadro a obraz zobrazenia L_{21} , určite ich dimenzie.
 - Rozhodnite, či k zobrazeniu L_{21} existuje inverzné zobrazenie. Ak nie, zdôvodnite. Ak áno, popíšte ho a nájdite jeho maticu vzhľadom na bázu z časti b).
4. Majme maticu A typu $m \times n$ hodnosti m a maticu B typu $n \times p$ hodnosti n . Rozhodnite aká môže byť hodnosť matice AB . Dokážte správnosť svojej odpovede.
5. a) Nech A a B sú invertibilné matice. Nájdite všetky matice X , ktoré budú spĺňať: $AXB = A + B$.
- Ukážte, že ak je matica B singulárna, t.j. $\mathcal{N}(B) \neq \{\vec{0}\}$, tak pre nejakú maticu A (nájdite A) matica X spĺňajúca $AXB = A + B$ nemôže existovať.