

*Podvádzanie pri písomke je vážnym porušením Študijného poriadku FMFI UK, ktoré môže viesť k vylúčeniu zo štúdia.
Nerobte hlúposti. Počas písomky je zakázané používať mobilné telefóny a iné elektronické zariadenia. Veľa zdaru!*

Písomka z Lineárnej Algebry I., 18. december 2019

1. Nech V a W sú podpriestory \mathbb{R}^4 dané ako:

$$V = \text{span}[(1, 2, 3, 4)^T, (0, 4, 1, -1)^T], \quad W = \text{span}[(4, 3, 1, -6)^T, (2, 1, 2, 1)^T].$$

- a) Nájdite dimenziu a bázu ich priekruhu $U = V \cap W$.
- b) Nájdite maticu P_U kolmej projekcie na podpriestor U .

2. Pre maticu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

nájdite pomocou Gram-Schmidtovoho ortogonalizačného procesu jej QR rozklad.

3. Nech R je symetrická $n \times n$ matica splňajúca $R^2 = I$. Označme $z_y = y - Ry$ a $w_y = y + Ry$ pre libovoľný vektor $y \in \mathbb{R}^n$. Označme $Z = \{z_y \mid y \in \mathbb{R}^n\}$ a $W = \{w_y \mid y \in \mathbb{R}^n\}$

- a) Ukážte, že Z a W sú podpriestory \mathbb{R}^n .
- b) Ukážte, že pre každé $z \in Z$ a $w \in W$ platí $z \perp w$.
- c) Platí $Z^\perp = W$? Zdôvodnite.
- d) Nájdite matice ortogonálnych projekcií do podpriestorov Z a W .

4. Nech U a V sú podpriestory v nejakom \mathbb{R}^n . Ukážte, že potom platí

$$(U + V)^\perp = U^\perp \cap V^\perp.$$

Návod: Ukážte inkluzie $(U + V)^\perp \subseteq U^\perp \cap V^\perp$ a $(U + V)^\perp \supseteq U^\perp \cap V^\perp$.

5. Nech

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix},$$

kde $a, b, c, d, e, f, g, h, i \in \mathbb{R}$. Ak $\det(A) = 1$, nájdite determinant matice

$$B = \begin{bmatrix} a & b & c & a \\ b & e & h & e \\ a & d & g & d \\ c & f & i & f \end{bmatrix}.$$