Podvádzanie pri skúške je vážnym porušením Študijného poriadku FMFI UK, ktoré môže viesť k vylúčeniu zo štúdia. Nerobte hlúposti. Počas písomky je zakázané používať mobilné telefóny a iné elektronické zariadenia. Veľa zdaru!

Opravná písomná skúška z Lineárnej algebry a geometrie I., 22. január 2020

1. *(5 bodov)* Nech V je podpriestor $\mathbb{R}^5$ generovaný vektormi $(1,1,1,1,1)^T$, $(0,1,2,3,4)^T$, $(4,3,2,1,0)^T$. Nech U je nulový priestor matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Nájdite bázu a dimenziu $V^\perp$.
b) Nájdite bázu a dimenziu $V \cap U$.
c) Nájdite bázu a dimenziu $V^\perp + U$.
d) Nájdite maticu kolmej projekcie do V.

2. *(5 bodov)* Nech P je projekčná matica kolmej projekcie na podpriestor $S \subseteq \mathbb{R}^n$ a Q je projekčná matica kolmej projekcie na $S^\perp$. Ukážte, že

a) $P + Q = I$ b) $PQ = 0$ c) $(P-Q)^{-1} = P - Q$ d) $\operatorname{Tr} P = \dim S$ a $\operatorname{Tr} Q = \dim S^\perp$

3. *(6 bodov)* Nech $\mathcal{C}^\infty(\langle -1,1\rangle)$ je vektorový priestor hladkých funkcií na intervale $\langle -1,1\rangle$ (takých, ktoré majú spojitú deriváciu ľubovoľného stupňa).

Definujme transformácie $D, S : \mathcal{C}^\infty(\langle -1,1\rangle) \to \mathcal{C}^\infty(\langle -1,1\rangle)$ ako

$$D(f) = \frac{df}{dx}, \qquad S(f) = xf.$$

(Teda D reprezentuje derivovanie $D : f \mapsto f'$ a S násobenie funkciou x.)

a) Ukážte, že D a S sú lineárne transformácie.
b) Nájdite jadrá transformácií D a S.
c) Kam zobrazia zložené zobrazenia $D \circ S$ a $S \circ D$ funkciu f?
d) Aké zobrazenie dostaneme ako ich rozdiel $D \circ S - S \circ D$?

4. *(4 body)* Majme vektory $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vo vektorovom priestore V. Nech $T : V \to W$ je lineárne zobrazenie. Ukážte, že ak sú vektory $T(x_1), T(x_2), \ldots, T(x_n)$ lineárne nezávislé, potom sú aj vektory $x_1, x_2, \ldots, x_n$ lineárne nezávislé.

5. *(15 bodov)* Pravda/Nepravda. So zdôvodnením v pravdivom prípade a protipríkladom v nepravdivom:

a) Nulový priestor 3×4 matice nemôže pozostávať iba z nulového vektora.
b) Ak A je invertibilná matica, potom majú matice AB a B rovnaký nulový priestor.
c) Pre matice $A_{m,n}$, $B_{n,k}$ platí $h(AB) = \min\{h(A), h(B)\}$.
d) Ak sú riadky matice A lineárne závislé, potom sú lineárne závislé aj riadky matice AB.
e) Transformácia T z množiny všetkých spojitých funkcií do $\mathbb{R}$ definovaná ako

$$T(f) = f(1)$$

je lineárna transformácia.

f) Nech W je dvojrozmerný podpriestor $\mathbb{R}^5$ a $\{q_1, q_2\}$ a $\{p_1, p_2\}$ sú dve ortonormálne bázy W. Potom $q_1 q_1^T + q_2 q_2^T = p_1 p_1^T + p_2 p_2^T$.

6. *(5 bodov)* Koľko rôznych 3×3 matíc A môže mať nasledujúcu adjungovanú maticu

$$A_{\text{adj}} = \begin{bmatrix} 1-t^2 & t^3-t & 0 \\ t^3-t & 1-t^4 & t^3-t \\ 0 & t^3-t & 1-t^2 \end{bmatrix}?$$

Nájdite všetky také A. Ako závisí odpoveď od parametra t?

Pomôcka: Ako vyzerá inverzná matica k A_{adj}? Aký je vzťah medzi $\det A$ a $\det A_{\text{adj}}$?