Lineárna algebra a geometria II. – Domáca úloha č. 1

Cvičenia v týždni 18. februára 2008

---

1. (5.2.11) Ak vlastné hodnoty 3×3 matice A sú $1, 1$ a 2, ktoré z nasledujúcich tvrdení sú zaručene pravdivé? Zdôvodnite v pravdivom prípade, nájdite protipríklad v nepravdivom.
a) A je invertibilná,
b) A je diagonalizovateľná,
c) A nie je diagonalizovateľná.

2. (5.2.12) *(Pravda/Nepravda)* Predpokladajme, že jedinými vlastnými vektormi matice A sú násobky vektora $x = (1, 0, 0)$.
a) A nie je invertibilná,
b) A má viacnásobnú vlastnú hodnotu,
c) A nie je diagonalizovateľná.

3. (5.2.14) Ak A je diagonalizovateľná matica, ukážte, že determinant matice $A = S\Lambda S^{-1}$ je súčinom vlastných hodnôt matice A.

4. (5.3.5) Predpokladajme, že počas epidémie každý mesiac polovica zdravých ľudí ochorie a štvrtina chorých ľudí zomrie. Nájdite stabilný stav príslušného Markovovského procesu

$$\begin{bmatrix} m_{k+1} \\ ch_{k+1} \\ z_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_k \\ ch_k \\ z_k \end{bmatrix}.$$

5. (5.3.7) Nájdite limitné hodnoty y_k a z_k pre $k \to \infty$ ak

$$y_{k+1} = 0.8y_k + 0.3z_k \qquad y_0 = 0$$

$$z_{k+1} = 0.2y_k + 0.7z_k \qquad z_0 = 5.$$

Tiež nájdite formuly pre y_k a z_k použijúc $A^k = S\Lambda^k S^{-1}$.

6. (5.3.9) Predpokladajme, že spoločnosť *Sťahuj sa požičaným tirákom sám!* má tri hlavné centrá. Každý týždeň polovica z tých áut, čo sú v Malackách a Sabinove ide do Fiľakova a druhá polovica zostane tam, kde boli. Polovica tirákov z Fiľakova pôjde do Malaciek a druhá do Sabinova. Zostrojte 3×3 maticu prechodu A a nájdite stály stav u_∞ zodpovedajúci vlastnej hodnote $\lambda = 1$.

7. (5.3.12) Ak A je Markovovská matica, ukážte, že súčet zložiek vektora Ax sa rovná súčtu zložiek vektora x. Odvoďte z toho, že ak $Ax = \lambda x$ pre $\lambda \neq 1$, potom súčet zložiek vlastného vektora x je 0 (a teda nemôže byť nezáporný).

8. (5.R.7) Čo by ste uprednostnili – 50%-ný úrok (p.a) pripisovaný raz ročne, 44%-ný úrok (p.a) pripisovaný štvrťročne alebo 42%-né (p.a) spojité úročenie?

9. Pre nasledujúce matice výjde, že vlastné hodnoty matice A sú 1 a 9 a vlastné hodnoty matice B sú -1 a 9:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Nájdite maticovú druhú odmocninu matice A v tvare $R = S\sqrt{\Lambda}S^{-1}$. Prečo nemôže existovať druhá odmocnina pre maticu B s reálnymi zložkami?

10. a) Kedy vlastné vektory pre vlastnú hodnotu $\lambda = 0$ generujú celý nulový priestor $\mathcal{N}(A)$?
b) Kedy generujú (všetky) vlastné vektory pre $\lambda \neq 0$ stĺpcový priestor $\mathcal{S}(A)$?

11. Mocniny A^k sa blížia k nule ak pre všetky $|\lambda_i| < 1$ a "utečú do nekonečna", ak pre nejaké $|\lambda_i| > 1$. Pre nasledujúce štyri príklady overte ich asymptotické správanie.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 5 & 6.9 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\|A^{1024}\| > 10^{700} \qquad B^{1024} = I \qquad C^{1024} = -C \qquad \|D^{1024}\| < 10^{-78}$$

Nájdite vlastné hodnoty $\lambda = e^{i\theta}$ pre matice B a C, u'ažte pomocou toho, že $B^4 = I$ a $C^3 = -I$.

12. Nájdite explicitný tvar pre n-tý člen rekurentnej postupnosti $\{x_n\}$ danej vzťahom $x_{k+3} = 3x_{k+1} + 2x_k$ a začiatočnými podmienkami $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ a $x_2 = -2$.