Lineárna algebra a geometria II. – Domáca úloha č. 2

Cvičenia v týždni 25. februára 2008

---

1. (5.4.1) Nájdite vlastné hodnoty, vlastné vektory a exponenciálu e^{At} pre maticu

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. (5.4.2) Pre maticu A z predchádzajúceho príkladu nájdite všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice $du/dt = Au$. Nájdite riešenie, ktoré spĺňa počiatočnú podmienku $u_0 = (3,1)^T$. Aký je *rovnovážny stav* keď $t \to \infty$? (Pozn. toto je príklad spojitého markovovského procesu; $\lambda = 0$ v diferenciálnej rovnici totiž zodpovedá $\lambda = 1$ v diferenčnej rovnici vďaka rovnosti $e^{0t} = 1$).

3. (5.4.4) Ak P je projekčná matica, ukážte pomocou nekonečného radu, že

$$e^P \approx I + 1.718P.$$

4. (5.4.5) Diagonálna matica, napr. $\Lambda = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right]$, spĺňa rovnosť $e^{\Lambda(t+T)} = e^{\Lambda t}e^{\Lambda T}$, nakoľko rovnosť platí pre každú zložku na diagonále.

a) zdôvodnite prečo platí $e^{A(t+T)} = e^{At}e^{AT}$, použijúc vzťah $e^{At} = Se^{\Lambda t}S^{-1}$,

b) presvedčte sa, že pre matice neplatí vzťah $e^{A+B} = e^A e^B$ na príklade

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ (spočítajte e^A a e^B pomocou nekonečných radov)

5. (5.4.8) Predpokladajme, že veľkosti populácií zajacov $z(t)$ a vlkov $v(t)$ spĺňajú sústavu diferenciálnych rovníc

$$\frac{dz}{dt} = 4z - 2v,$$

$$\frac{dv}{dt} = z + v.$$

a) Je takýto systém stabilný, neutrálne stabilný alebo nestabilný? (pozri str. 280 v knižke)

b) Ak na začiatku máme $z_0 = 300$ a $v_0 = 200$, ako bude vyzerať stav populácií v čase t?

c) Aký bude pomer populácií zajacov a vlkov po dlhom, dlhom čase?

6. (5.4.13) Pre antisymetrickú rovnicu

$$\frac{du}{dt} = Au = \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

a) nájdite predpis pre u_1', u_2' a u_3' a ukážte, že $u_1'u_1 + u_2'u_2 + u_3'u_3 = 0$,

b) odvoďte z toho, že dĺžka $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$ je konštantná v čase,

c) nájdite vlastné hodnoty matice A.

Vektor riešení bude rotovať okolo osi $w = (a,b,c)^T$, nakoľko Au je *vektorový súčin* $u \times w$, ktorý je kolmý na u aj w.

7. (5.4.17) Ak do rovnice kmitania pridáme aj lineárny člen fx' zodpovedajúci tlmeniu spôsosbenému trecím odporom (napr. kmitanie vo viskóznej kvapaline), dostaneme rovnicu tlmeného oscilátora

$$x'' + fx' + \omega^2 x = 0.$$

Prepíšte takúto rovnicu do maticového tvaru $u' = Au$ a nájdite riešenie v tvare $u(t) = e^{At}u_0$.

Vysvetlite kvalitatívny rozdiel riešení pre $f < 2\omega$ a $f > 2\omega$.

8. Vychádzajúc zo vzorca $e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots$ zderivovaním po členoch a následným sčítaním ukážte, že $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$.

9. Pre maticu

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

nájdite všeobecný tvar jej mocnín J^k. Dosadiac do nekonečného radu vypočítajte e^{Jt}.

Skúste výpočítať mocniny J_n^k a exponenciálu $e^{J_n t}$ aj pre $n \times n$ maticu

$$J_n = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}$$