Lineárna algebra a geometria II. – Domáca úloha č. 3

Cvičenia v týždni 3. marca 2008

---

1. Riešte systém lineárnych rovníc $Ax = b$, kde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{a} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) v obore $\mathbb{Q}$, b) v $\mathbb{Z}_2$, c) v $\mathbb{Z}_3$, d) v $\mathbb{Z}_7$.

2. Koľko prvkov má vektorový priestor $\mathbb{Z}_p^n$?

3. a) Nájdite všetky invertibilné matice typu 2×2 s koeficientami v poli $\mathbb{Z}_2$. (Množinu takýchto matíc značíme $GL_2(\mathbb{Z}_2)$).
b) Nájdite všetky invertibilné matice typu 2×2 s koeficientami v poli $\mathbb{Z}_3$. (Množina $GL_2(\mathbb{Z}_3)$). Koľko z nich má determinant 1? (Množina značená $SL_2(\mathbb{Z}_3)$).

4. Nech V je vektorový priestor nad poľom $\mathbb{C}$ dimenzie n. Ukážte, že V je $2n$-rozmerný reálny vektorový priestor.

5. Komplexná $n \times n$ matica sa nazýva *hermitovská*, ak pre všetky i, j platí $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$. Ukážte, že hermitovské matice tvoria reálny vektorový podpriestor v priestore komplexných matíc $M_{n,n}(\mathbb{C})$, nájdite jeho bázu a určite jeho dimenziu. Ukážte tiež, že hermitovské matice netvoria komplexný vektorový podpriestor v $M_{n,n}(\mathbb{C})$.

6. Pre permutačnú maticu

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

nájdite jej vlastné hodnoty, vlastné vektory a diagonálny tvar.

7. (5.5.2) Čo sa dá povedať o:
i) súčte komplexného čísla s číslom s ním združeným?
ii) komplexnom združení čísla na jednotkovej kružnici?
iii) súčine dvoch čísel z jednotkovej kružnice?
iv) súčte dvoch čísel z jednotkovej kružnice?

8. (5.5.4) Nájdite hodnoty a a b pre komplexné čísla $a + ib$ na jednotkovej kružnici, ktorých argument zodpovedá uhlom $\theta = 30°$, $60°$, $90°$. Overte, že druhá mocnina prvého z nich sa rovná druhému a jeho tretia mocnina tretiemu.

9. (5.5.6) Nájdite dĺžky a (hermitovský) skalárny súčin pre

$$x = \begin{bmatrix} 2 - 4i \\ 4i \end{bmatrix} \qquad \text{a} \qquad y = \begin{bmatrix} 2 + 4i \\ 4 \end{bmatrix}.$$

10. (5.5.7) Napíšte maticu A^H a spočítajte $C = A^H A$ ak

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ i & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aký je vzťah medzi C a C^H? Platí niečo podobné pre každú maticu C, ktorá sa dá zapísať ako $A^H A$?

11. (5.5.9) a) Ako súvisí determinant matice A^H s determinantom matice A?

b) Dokážte, že determinant ľubovoľnej hermitovskej matice je reálne číslo.

12. (5.5.22) Pre každú komplexnú maticu Z vieme nájsť rozklad na jej hermitovskú a anti-hermitovskú časť: $Z = A + K$. Podobne ako pri rozklade komplexného čísla $z = a + ib$ dostaneme jeho reálnu časť ako $\frac{1}{2}(z + \bar{z})$, môžeme uvažovať "reálnu časť" matice Z ako polovicu $Z + Z^H$. Nájdite vzorec pre "imaginárnu časť" K a nájdite rozklady $A + K$ pre nasledujúce matice:

$$Z = \begin{bmatrix} 3+i & 4+2i \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad \text{a} \qquad Z = \begin{bmatrix} i & i \\ -i & i \end{bmatrix}.$$

Pozn. Komplexná matica K sa nazýva *anti-hermitovská* (alebo aj *koso-hermitovská*), ak ak pre všetky i, j platí $a_{ij} = -\bar{a}_{ji}$.

13. Nájdite chybu v nasledujúcom "dôkaze" toho, že každá vlastná hodnota matice s reálnymi zložkami je reálne číslo:

Rovnosť $Ax = \lambda x$ môžme zľava prenásobiť x^T, čím dostaneme $x^T A x = \lambda x^T x$. Z toho $\lambda = \frac{x^T A x}{x^T x}$, čo je pre $x \in \mathbb{R}^n$ vždy reálne číslo.

(Porzite tiež str. 295 v knižke)