Lineárna algebra a geometria II. – Domáca úloha č. 5

Cvičenia v týždni 17. marca 2008

---

1. (5.6.3) Vysvetlite, prečo matica A nemôže byť nikdy podobná matici $A + I$.

2. (5.6.4) Nájdite diagonálnu maticu M, ktorej zložky sú 1 a -1, tak aby matice A a B boli podobné.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ & 1 & 2 & 1 \\ & & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. (5.R.19) Ak je matica K anti-symetrická, ukážte, že matica $Q = (I - K)(I + K)^{-1}$ bude ortogonálna. Nájdite Q pre $K = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{smallmatrix}\right]$.

4. (5.6.5) Ukážte, že ak je matica B invertibilná, potom sú matice AB a BA podobné.

5. (5.6.6) a) Ak $CD = -DC$ a D je invertibilná, ukážte, že potom je C podobná $-C$.
b) Odvoďte z toho, že vlastné hodnoty matice C musia existovať v pároch s opačnými znamienkami.
c) Ukážte priamym výpočtom, že ak $Cx = \lambda x$, potom $C(Dx) = -\lambda(Dx)$.

6. (5.6.8 a 9) Aká matica zodpovedá zmene báz z $v_1 = (1, 1)$ a $v_2 = (1, 4)$ na $w_1 = (2, 5)$ a $w_2 = (1, 4)$? Stĺpce matice M dostaneme tak, že vyjadríme v_1 a v_2 ako kombináciu w_1 a w_2.
Vyjadrite vektor $(3, 9)$ ako kombináciu $c_1v_1 + c_2v_2$, aj ako kombináciu $d_1w_1 + d_2w_2$. Overte, že matica M naozaj prevádza c na d: $Mc = d$.

7. (5.6.13) Derivácia všeobecného polynómu $a + bx + cx^2$ stupňa 2 má tvar $b + 2cx$. Pripomeňme si, že polynómy tvoria vektorový priestor a derivácia je lineárna transformácia.
a) Nájdite maticu D zodpovedajúcu derivovaniu, t.j.

$$D \left[\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} b \\ 2c \\ 0 \end{smallmatrix}\right].$$

b) Vypočítajte D^3 a vysvetlite výsledok v reči derivácií.
c) Aké sú vlastné hodnoty a vlastné vektory matice D?

8. (5.6.24) a) Ukážte priamym výpočtom, že (horná) trojuholníková matica, povedzme 3×3, spĺňa svoju charakteristickú rovnicu: $(T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I)(T - \lambda_3 I) = 0$.
b) Substitúciou $U^{-1}AU$ za T odvoďte *Cayley-Hamiltonovu vetu*: Každá matica je riešením svojej charakteristickej rovnice: $(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) \dots (A - \lambda_n I) = 0$.

9. (5.R.22) Aké sú vlastné hodnoty matice A spĺňajúcej $A^2 = -I$? Ak A je taká reálna $n \times n$ matica, ukážte, že potom n musí byť párne. Uveďte príklad.