Lineárna algebra a geometria II. – Domáca úloha č. 6

Cvičenia v týždni 31. marca 2008

---

1. (5.6.2) Opíšte slovne všetky matice, ktoré sú podobné matici $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right]$ a nájdite zopár príkladov.

2. Nájdite všetky ortogonálne 2×2 matice, ktoré majú vlastné hodnoty 1 a -1. Akú transformáciu roviny $\mathbb{R}^2$ reprezentujú?

3. (5.6.15) V priestore 2×2 matíc označme ako T transformáciu, ktorá maticu transponuje. Nájdite vlastné hodnoty a "vlastné matice" transformácie T, t.j. matice spĺňajúce $A^T = \lambda A$.

4. (5.6.16) a) Nájdite ortogonálnu maticu Q, tak aby platilo $Q^{-1}AQ = \Lambda$ pre

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{a} \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Nájdite tiež aj ďalší pár vlastných ortonormálnych vektorov x_1, x_2 pre $\lambda = 0$.
b) Overte, že $P = x_1 x_1^T + x_2 x_2^T$ je rovnaká matica pre oba páry.

5. (5.6.18) Nájdite normálnu maticu, ktorá nie je Hermitovská, anti–Hermitovská, unitárna ani diagonálna. Ukážte, že všetky permutačné matice sú normálne.

6. (5.6.19) Predpokladajme, že T je 3×3 horná trojuholníková matica, jej zložky označme t_{ij}. Porovnajte zložky TT^H a $T^H T$ a ukážte, že ak sa rovnajú, musí byť T diagonálna.

7. (5.6.20) Ukážte, že ak je N normálna matica, potom $||Nx|| = ||N^H x||$ pre každý vektor x. Odvoďte z toho, že i-ty riadok matice N má rovnakú dĺžku ako i-ty stĺpec matice N.
Pozn.: Ak je N navyše horná trojuholníková, z tohto opäť vyplýva, že N musí byť diagonálna.

8. (5.6.23) Ak má matica A vlastné hodnoty λ_1, λ_2 a λ_3, čo budú vlastné hodnoty matice $(A - \lambda_3 I)(A - \lambda_2 I)(A - \lambda_1 I)$? Čo to bude za matica?

9. Nájdite 3×3 maticu, pre ktorú má nula ako vlastná hodnota algebraickú násobnosť 3 a geometrickú násobnoť 1.

10. (5.6.27) Majme maticu A, pre ktorú $a_{ij} = 1$ pre zložky nad hlavnou diagonálou ($i < j$) a $a_{ij} = 0$ pre všetky ostatné ($i \geq j$). Nájdite jej vlastné vektory (napr. pre prípad 4×4), ako aj vektory spĺňajúce rovnice typu $Ax_{i+1} = x_i$, kde x_1 je vlastný vektor.

11. (5.R.3,4) Ak má matica A vlastné hodnoty 0 a 1, zodpovedajúce vlastným vektorom $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$ a $\left[\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$, prečo sa dá vopred, bez jej výpočtu, povedať že bude symetrická? Ako bude A vyzerať?
Aké budú vlastné hodnoty a vlastné vektory matice A^2? Aký je vzťah medzi A a A^2?

12. (5.R.5) Existuje matica A taká, že matice typu $A + cI$ sú invertibilné pre všetky komplexné čísla c? Nájdite reálnu maticu A takú, že $A + rI$ bude invertibilná pre všetky reálne r.

13. (5.R.21) Ak M je diagonálna matica so zložkami d, d^2 a d^3, čo bude $M^{-1}AM$ a aké bude mať vlastné hodnoty ak

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}?$$